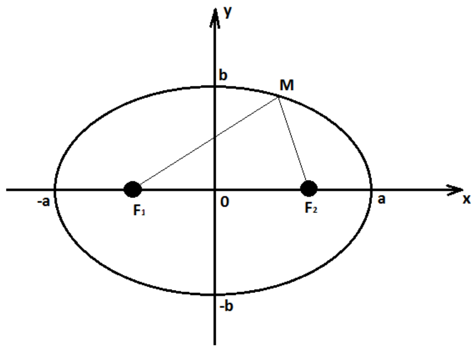
Пример задачи для олимпиады по комплексу предметов

физика – математика – информатика

Необходимая математическая преамбула.

Как известно из первого закона Кеплера, орбиты планет являются эллипсами, в одном из фокусов которых находится Солнце.

Напомним, что эллипсом называется замкнутая кривая, сумма расстояний от любой точки M которой до двух фиксированных точек (фокусов) F_1 и F_2 постоянна (и равна $2a$). Геометрически эллипс также можно описать с помощью двух полуосей: большой a и малой b (см. рис.)

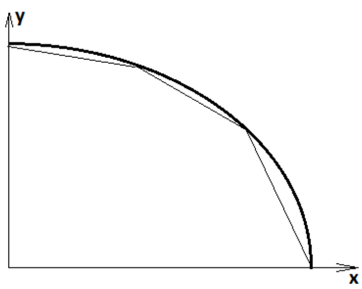


Длина (периметр) эллипса выражается формулой

$$L = 4aE(e, \pi/2) = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi ,$$

(где $e = \sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$ – эксцентриситет эллипса, a и b - большая и малая полуоси). Входящий в формулу интеграл $E(e, \pi/2)$ (полный эллиптический интеграл 2-го рода, равный четверти длины эллипса) не выражается через элементарные функции и его приходится находить с помощью приближенных алгоритмов.

Одним из простейших таких алгоритмов является замена дуги эллипса (четверти периметра) на ломаную, составленную из отрезков, концы которых лежат на эллипсе. Другими словами, на дуге эллипса расставляется некоторое количество точек, которые соединяются отрезками. Затем вместо длины дуги вычисляется сумма длин построенных отрезков. Если точек достаточно много, то мы получим хорошее приближение к искомой величине. На рисунке справа представлена такая ломаная, состоящая из трех звеньев. При этом точки излома можно задавать по-разному. Например, можно располагать их равномерно по длине дуги эллипса, можно равномерно задавать их абсциссы (или ординаты) или как-либо еще. В любом случае увеличение количества звеньев ломаной будет приводить к уменьшению различия между длинами дуги эллипса и ломаной.



Для проверки качества полученного приближения обычно поступают следующим образом. Увеличивают вдвое количество используемых отрезков (т.е. ставят по одной новой точке между каждой парой имеющихся) и заново вычисляют длину. По степени близости Δ_B двух полученных приближений можно судить о степени их близости Δ_0 к точному значению. (Строгое соотношение между величинами Δ_B и Δ_0 здесь не приводится. Для целей дальнейших расчетов можно пользоваться тем, что $\Delta_0 \le \Delta_B$.) Если при увеличении точности (увеличении количества звеньев ломаной) несколько старших цифр результата перестают меняться, то эти цифры можно считать верными.

Задача.

1. Найдите среднюю скорость движения Земли по орбите (учитывая эллиптичность ее орбиты). Укажите количество верных цифр в полученном значении.
2. А теперь пренебрегите эллиптичностью и, считая орбиту Земли окружностью радиуса a (по которой Земля движется с найденной в п. 1 средней скоростью), найдите массу Солнца.

Параметры Земной орбиты:

$a = 149.6 \cdot 10^9\,м$, $e = 0.017$,

период обращения вокруг Солнца (тропический год) 365.25 сут.

Указания по представлению результатов.

Первая часть задачи не может быть выполнена без применения вычислительной техники. Поэтому для объективного оценивания работы должен быть представлен алгоритм расчета (например, блок-схема или псевдокод), исполняемый файл (.exe-файл), созданный использованным компилятором (средой программирования), а также все исходные тексты программного проекта.

Для выполнения второй части задачи достаточно знаний базового курса физики и калькулятора. Поэтому эту часть можно представить на проверку отдельно на бумаге. Однако не возбраняется (и даже приветствуется) включение соответствующих расчетов в компьютерную программу, разработанную при выполнении п. 1.

Вместо ответа.

Данная задача описывает давно и хорошо известные процессы. Она не содержит и не приводит к данным малоизвестным или скрытым государственной тайной. Поэтому, а также для того, чтобы не уменьшить исследовательский интерес, точный ответ (средняя скорость Земли на орбите и масса Солнца) здесь не приводится. Справочная информация, в которой его нетрудно найти, достаточно широко распространена.

Желаем успехов!