

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса

1. Числовая характеристика x некоторого теплоэнергетического процесса является корнем уравнения

$$x^3 - 3x = t,$$

где t — температура окружающей среды, измеряемая в градусах Цельсия. По некоторым технологическим соображениям корень должен быть единственным. При каких значениях t уравнение имеет единственный корень x_0 ? Оцените снизу абсолютную величину этого корня и покажите, что полученную оценку улучшить нельзя.

Ответ.

Уравнение имеет единственный корень в точности при $|t| > 2$.

Для этого корня справедливо неравенство $|x| > 2$.

2. Для каждого целого значения параметра K решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ ([x] - x)^2 - 2[y] = K. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ означает целую часть числа x .

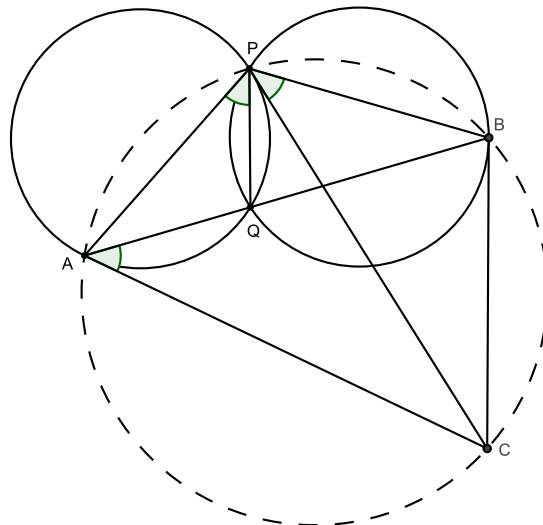
Ответ.

Если $K = 4M - 2$, где $M \in \mathbb{Z}$, то $x = M$, $y = 3/2 - 2M$.

При других K решений нет.

3. Две равные окружности пересекаются в точках P и Q . Произвольная прямая, проходящая через Q , повторно пересекает окружности в точках A и B , а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C . Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Один из возможных случаев.



4. При обработке числовых данных часто приходится вычислять среднее арифметическое

$$S(x, y) = (x + y)/2$$

и решать уравнения, содержащие среднее арифметическое. Найдите все конечные (состоящие из конечного числа элементов) числовые множества X такие, что для любых a и b из X множество X содержит корень x уравнения

$$S(a, x) = b.$$

Ответ: в точности все одноэлементные множества $X = \{a\}$, $a \in (-\infty; \infty)$.

5. Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно: а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1; б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2; в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1; г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2. Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Ответ. Не может.