

8 класс. Задача 1

Авиалайнер находился в непрерывном полете 330 минут. Известно, что в течение любого промежутка времени длительностью в один час (в течение указанного времени) он преодолевал ровно 900 км. Можно ли утверждать, что средняя скорость лайнера составляла 900 км/ч?

Решение

Построим контрпример. Пусть, например, первые полчаса он двигался со скоростью 500 км/ч, а вторые полчаса со скоростью 1300 км/ч. Затем опять полчаса со скоростью 500 км/ч, а последующие полчаса со скоростью 1300 км/ч. и т. д. Несложно проверить, что за каждый час при таком движении проходит ровно 900 км. В итоге за 5,5 часов (= 330 мин) он продвинется на расстояние

$$6 \cdot 500 + 5 \cdot 1300 = 4750 \text{ км,}$$

а средняя скорость составит $\frac{4750}{5,5} < 900$ км/ч.

Ответ. Нет.

8 класс. Задача 2

В Замедвежье 14 населенных пунктов, часть их которых – города, остальные – села. Диспетчер соединил их попарно семью вездеходными маршрутами (каждый маршрут связывает два пункта и не заходит в остальные). При этом оказалось, что ровно половина всех городов связана с селами.

Найдите количество городов, сел и маршрутов типа село-город (если возможны разные варианты, то найдите их все).

Можно ли так переделать сеть маршрутов, чтобы ровно половина сел была связана с городами?

(Из каждого пункта всегда выходит только один маршрут.)

Решение

Обозначим каждый город через А, каждое село через В.

Пусть a и b – число объектов каждого вида А, В, N – число пар, тогда

$$a + b = 2N, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (1)$$

Если есть ровно $a/2$ пар вида АВ, то a четно, причем остальные $a/2$ объектов А образуют пары только с такими же объектами А, откуда $a/2$ четно и тогда a кратно 4. Из наличия $a/2$ пар АВ получаем

$$b \geq a/2. \quad (2)$$

Далее перебором (наиболее естественный путь для младших) с учетом условий (1), (2) находим a, b и состав пар.

Чтобы можно было составить пары, удовлетворяющие второму условию задачи, необходимы и достаточны симметричные ограничения: b кратно 4, $a \geq b/2$.

Ответы:

$N = 7$ — 2 варианта ответа:

- 1) 4 города, 10 сел: $a = 4, b = 10, AB, AB, AA, BB, BB, BB, BB$, нельзя;
- 2) 8 городов, 6 сел: $a = 10, b = 4, AB, AB, AB, AB, AA, AA, BB$, нельзя.

8 класс. Задача 3

На прокладке газопровода работают три бригады с постоянной интенсивностью. Первая и третья бригады, работая вместе, за месяц прокладывают 15 км трубы. Все три бригады вместе могут проложить за месяц трубу в два раза длиннее, чем вторая и первая бригады вместе. Сколько километров трубы может проложить в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада вместе с третьей прокладывают участок трубы в четыре раза быстрее, чем его проложила бы одна вторая бригада?

Решение

Пусть бригады в месяц могут проложить соответственно X, Y, Z км. Тогда, переведя условия задачи в символическую запись, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}X + Z &= 15, \\X + Y + Z &= 2(X + Y), \\Y + Z &= 4Y.\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}X + Z &= 15, \\X + Y &= Z, \\Z &= 3Y.\end{aligned}$$

Откуда $X = 6, Y = 3, Z = 9$.

Ответ. 9 км.

8 класс. Задача 4

Дано N целых чисел. Произведение всех этих чисел равно 1. Может ли сумма их 21-ых степеней быть равной нулю? Выясните, при каких N такое возможно, а при каких нет и почему.

Решение

Ясно, что каждое число равно либо $+1$, либо -1 . Их 21-е степени совпадают с самими числами.

Чтобы сумма была равна нулю, нужно иметь равное количество положительных и отрицательных единиц.

Чтобы произведение было равно 1, нужно иметь четное количество отрицательных единиц.

Таким образом, сумма может занулиться только при N кратных 4.

Ответ. При N кратных 4.

8 класс. Задача 5

По трем параллельным железнодорожным путям движутся три поезда. Первый поезд движется в том же направлении, что и второй, но с меньшей скоростью. Второй поезд вдвое длиннее первого и проходит мимо него за 2 минуты 6 секунд. Третий поезд в три раза длиннее первого. Он движется в противоположном направлении относительно первых двух и проходит мимо второго за 30 секунд. За какое время третий поезд пройдет мимо первого?

Решение

Обозначим через L длину первого поезда, через v_1 , v_2 , v_3 их скорости (без учета направления).

Первый и второй поезда двигаются в одну сторону, поэтому разность их скоростей (скорость сближения второго и первого поезда) равна частному суммы длин поездов и времени обгона первого поезда вторым:

$$v_2 - v_1 = \frac{3L}{126} = \frac{L}{42}.$$

Второй и третий двигаются в противоположные стороны, поэтому сумма их скоростей (скорость сближения второго и третьего поезда) равна частному суммы длин поездов и времени проезда второго поезда мимо третьего:

$$v_2 + v_3 = \frac{5L}{30} = \frac{L}{6}.$$

Тогда скорость сближения первого и третьего поезда равна

$$v_1 + v_3 = \frac{L}{6} - \frac{L}{42} = \frac{L}{7}.$$

Следовательно, время проезда третьего поезда мимо первого равно

$$\frac{4L}{v_1 + v_3} = \frac{4L}{L \cdot \frac{1}{7}} = 28 \text{ (с)}.$$

Ответ. За 28 секунд.