

РЕШЕНИЕ
ВАРИАНТ 27771 для 7-го класса

1. Школьники, изучающие термодинамику и тепловые явления, решили провести любопытный эксперимент. Они заморозили воду в виде ледяного куба с ребром 10 см и 1000 кубиков с длиной ребра 1 см. В распоряжении школьников было два одинаковых идеальных термостата, в которых постоянно поддерживалась температура 0 °С. Школьники поместили куб в один термостат, а все кубики аккуратно разложили в один слой во втором так, что они не касались друг друга. Время таяния льда в каждом термостате измерялось секундомером, который включался, когда в термостате появлялись первые капли воды, и выключался, когда лед полностью превращался в воду. Сравните показания секундомера по окончании опыта. Объясните свои выводы.

Решение:

Количество теплоты, поступающее в куб в единицу времени, пропорционально площади его поверхности, т.е. квадрату длины его ребра, а количество теплоты, необходимое для плавления куба, пропорционально его объему, т.е. кубу длины его ребра. Поэтому время, необходимое для плавления куба, пропорционально длине его ребра. При разбиении куба на $1000000 = 100 \cdot 100 \cdot 100$ одинаковых кубиков длина ребра каждого кубика оказывается в 100 раз меньше длины ребра исходного куба. Поэтому миллион одинаковых кубиков растают в сто раз быстрее, чем исходный куб. Если куб разбивается на кубики разных размеров, то время плавления всех кубиков будет определяться размером наибольшего из получившихся кубиков.

Ответ: маленькие кубики растают быстрее в 100 раз.

2. Катя и Серёжа учатся в МЭИ. Обычно они встречаются на станции метро «Авиамоторная» и идут пешком на занятия в Главный учебный корпус, но по средам, когда первой парой у них физкультура, они едут до станции «Лефортово», потому что от неё до стадиона «Энергия» идти всего три минуты. В среду Серёжа сел в поезд метро на станции «Первомайская» и проехал $N_C = 5$ остановок, одна из которых была с пересадкой, но после одной из станций поезд ненадолго останавливался в туннеле. Катя села в свой поезд на станции «Улица Дмитриевского» одновременно с Серёжей и проехала без пересадок $N_K = 7$ остановок. На станцию «Лефортово» они приехали одновременно. Какое время t поезд Серёжи стоял в туннеле? Средняя скорость поездов метро между остановками $v = 50$ км/час, среднее расстояние между остановками $S_0 = 2$ км, среднее время остановки $t_0 = 2$ мин, время пересадки $t_n = 5$ мин.

Решение.

$$\frac{N_C S_0}{v} + (N_C - 1)t_0 + t_n + t = \frac{N_K S_0}{v} + (N_K - 1)t_0 \Rightarrow$$

$$t = (N_K - N_C) \cdot \left(\frac{S_0}{v} + t_0 \right) - t_n = (7 - 5) \cdot \left(60 \cdot \frac{2}{50} + 2 \right) - 5 = 2 \cdot 4,4 - 5 = 3,8 \approx 4 \text{ мин}$$

Ответ: $t = (N_K - N_C) \cdot \left(\frac{S_0}{v} + t_0 \right) - t_i \approx 4 \text{ мин.}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап.

3. Кастрюля с водой 1 уравновешена на рычажных весах с помощью гири 2 (см. рис. а). В воду опускают металлический шарик 4, подвешенный на легкой нити (см. рис. б) так, что он не касается дна и стенок кастрюли. Нить привязана к коромыслу 3 вторых весов, равновесие которых достигается при помещении на правую чашку трех одинаковых гирек 5. Определите плотность материала шарика, если для уравновешивания весов с кастрюлей к гире 2 необходимо добавить одну гирьку 5. Плотность воды $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$.

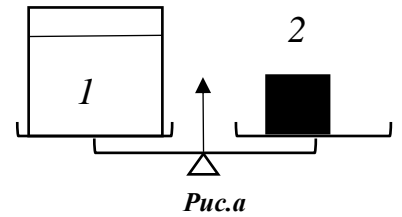


Рис.а

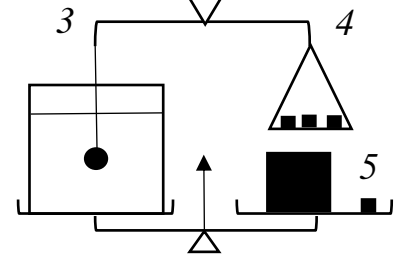


Рис.б

Решение:

m – масса маленькой гирьке, она равна массе вытесненной жидкости. m_0 – масса шарика.

По закону Архимеда:

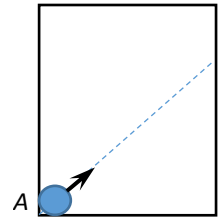
$$m_0 - m = 3m$$

$$m_0 = 4m$$

Следовательно, плотность шарика равна $4\rho = 4000 \text{ кг/м}^3$

Ответ: 4000 кг/м^3

4. Горизонтальный стол с идеально гладкой поверхностью имеет размеры $182 \times 387 \text{ см}$. Стол со всех сторон огорожен вертикальными идеально упругими бортиками. По столу могут прямолинейно и равномерно двигаться шайбы диаметром 2 см. Первая шайба в начальный момент времени располагается в положении А (касаясь двух бортиков стола одновременно) и начинает движение со скоростью 5 м/с под углом 45° к бортику (см. рис). Вторая шайба стартует из того же положения А через 1 с в том же направлении. Определите минимальную скорость второй шайбы, при которой она успеет догнать первую шайбу до того момента, когда первая шайба коснется двух бортиков одновременно. Считать, что столкновения шайб с бортиками происходят по принципу «угол падения равен углу отражения», а модуль скорости при этом не изменяется.



Решение:

Рассмотрим движение центра масс шайбы. Его движение при всех столкновениях со стенками можно рассмотреть, как движение материальной точки по полю меньшего размера – $180 \times 385 \text{ см}$.

В точке первого удара (угол падения равен углу отражения!) зеркально отобразим поле стола. Таким же образом поступим в точках последующих соударений шайбы с бортиками. В результате построим развертку «зазеркаля» отражая поле стола от его стенок. При этом траектория шайбы отображается в прямую линию, то есть задача становится полностью одномерной. Отметим, что угол наклона траектории к любой стороне поля будет равен 45° .

Найдем, когда эта прямая пройдет через первый угол стола (не считая точки старта). Для этого необходимо отразить стол столько раз, чтобы получился квадрат, стороны которого удовлетворяют соотношению

$$180a = 385b,$$

где a, b — минимально достижимые натуральные числа, а шайба двигалась бы строго по диагонали этого квадрата.

После деления на общий множитель 5 (легко виден) получаем

$$36a = 77b,$$

где 36 и 77 – взаимно простые числа. Поэтому решение

$$a = 77, \quad b = 36.$$

Таким образом, пройденный шайбой путь будет равен

$$S = \sqrt{(180 \cdot 77)^2 + (385 \cdot 36)^2} = \sqrt{(5 \cdot 36 \cdot 77)^2 + (5 \cdot 77 \cdot 36)^2} = 5 \cdot 77 \cdot 36 \cdot \sqrt{2} = 19601 [\text{см}] = 196 [\text{м}].$$

Найдем скорость второй шайбы из уравнения:

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S}{v_2} + t_0,$$

откуда

$$v_2 = \frac{S}{\frac{S}{v_1} - t_0} = \frac{Sv_1}{S - v_1 t_0}.$$

Окончательно

$$v_2 = \frac{Sv_1}{S - v_1 t_0} = \frac{196 \cdot 5}{196 - 5 \cdot 1} = 5,13 \text{ м/с}$$

5. В плотине Угличской ГЭС на Волге для прохода кораблей устроен шлюз длиной 290 м и шириной 30 м. При пропускании кораблей уровень воды в шлюзе опускается на 12 м. В один из дней через шлюз прошли 12 кораблей вниз по течению и 16 – вверх по течению. При этом проход осуществляется попеременно так, что первыми начинают шлюзование корабли, идущие вниз по течению. В шлюз каждый раз заходят по 2 корабля. Определите, во сколько раз средний суточный расход воды через шлюз меньше расхода через гидротурбины Угличской ГЭС, который в этот день составлял $800 \text{ м}^3/\text{с}$. Водоизмещением кораблей пренебречь. Ответ округлить до целых.

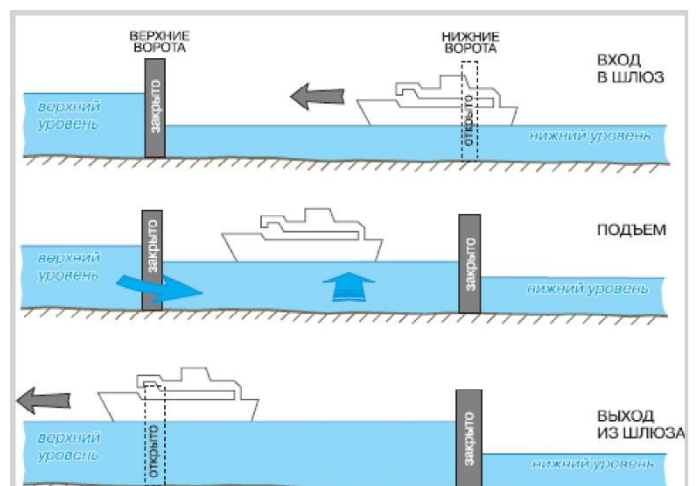


Рис. 1 Схема шлюзования при проходе корабля вверх по течению.

Фото 1. Вид на шлюз в плотине Угличской ГЭС с кораблями, идущими вниз по течению.

Решение:

При попеременном пропуске кораблей вода из шлюза выпускается только один раз на каждые 4 корабля – 2 корабля идущие вниз по течению и 2 корабля идущие вверх по течению.

Поэтому при пропуске 12 кораблей вниз по течению и 12 кораблей вверх по течению требуется открыть шлюз 6 раз. Дополнительный пропуск еще 4 кораблей, идущих вверх по течению, требует всего одного опорожнения шлюза, т. к. при проходе последних двух кораблей выпускать воду из шлюза не требуется.

Таким образом, полный объем воды, пропущенный через шлюз будет составлять:

$$V = 290 \cdot 30 \cdot 12 \cdot 7 = 730800 \text{ м}^3.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап.

При этом среднесуточный расход равен

$$Q = 730800 / (24 \cdot 3600) \approx 8,46 \text{ м}^3/\text{с}.$$

Этот расход в 95 раз меньше расхода воды через гидротурбины.

Ответ: 95 раз.