

Тренировочный этап. Решения

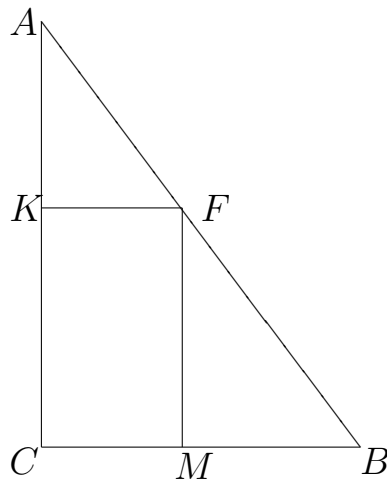
8 класс, задача 1

Проектировщик опоры ЛЭП инженер Лайтов имеет чертеж прямоугольного треугольника ABC , в котором $\angle A = 25^\circ$, $\angle C$ – прямой. Ему необходимо отметить на стороне AB такую точку, чтобы сумма длин перпендикуляров, опущенных из этой точки на две другие стороны, была бы минимальной. Сколько таких точек можно найти? В каких местах стороны AB они будут находиться?

Решение.

Изобразим прямоугольный треугольник ABC , произвольную точку F на стороне AB и опущенные из нее перпендикуляры FK и FM .

Заметим, что поскольку $\angle A$ меньше, чем $\angle B$, то катет CB меньше, чем катет AC .



$CKFM$ – прямоугольник по построению. Его сторона CK равна перпендикуляру FM . Сравним FK и AK . Эти отрезки являются катетами в прямоугольном треугольнике AKF , который подобен исходному треугольнику ACB (потому что отсекается от него прямой KF , параллельной CB). Таким образом, AK длиннее, чем KF .

Следовательно, сумма длин перпендикуляров FK и FM меньше, чем длина катета AC . Это соотношение длин сохраняется независимо от местоположения точки F на стороне AB .

Аналогичным образом, сумма длин перпендикуляров FK и FM всегда больше, чем длина катета CB . Значит, искомой точкой является один из концов стороны AB .

Ответ. Такая точка одна.

В вариантах 1 и 3 это точка A , в вариантах 2 и 4 это B .

8 класс, задача 2

19 октября в Царском Селе в честь дня знаменитого лица проводился праздничный фейерверк. Было выпущено 418 снарядов из нескольких пушек. Все пушки были построены в две одинаковые батареи и произвели по одинаковому количеству выстрелов. Число батарей меньше числа пушек в батарее, а число пушек в батарее меньше числа выстрелов, сделанных одной пушкой. Сколько выстрелов произвела каждая пушка?

Решение

Если x — число батарей, y — число пушек в батарее, z — число выстрелов из каждой пушки, то числа x, y, z натуральные, $x < y < z$, $x y z = 418$. Разлагая на простые множители $418 = 2 \cdot 11 \cdot 19$, получаем однозначно $z = 19$.

Разложить 418 на простые множители можно довольно быстро и просто. Сначала разделим 418 на 2, получим нечетное 209. Используя признаки делимости на 3 и 5, заметим, что 209 не кратно ни 3, ни 5. Далее, 209 не делится на 7, так как число $209 + 1 = 210$ кратно 7. Делить далее на 9 не требуется, так как 209 не кратно 3. Разделив же 209 на следующее нечетное 11, получим 19. Числа 11 и 19 простые, так как 11 не делится на меньшие простые 2, 3, 5, 7, а 19 не делится на меньшие простые 2, 3, 5, 7, 11 (делить 19 на 13 и 17 не требуется, так как $19 < 2 \cdot 13$).

Ответ. 19 выстрелов произвела каждая пушка.

8 класс, задача 3

Два игрока ведут довольно странную игру. Каждый из них поочередно выбирает по одной карте из 14 с числами $-15, -12, -11, -10, -5, -9, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12$ (и не возвращает ее). Выигрывает тот, у кого окажется больше сумма модулей 7 выбранных чисел. Может ли выиграть тот, кто делает второй ход?

Решение

Выигрышная стратегия достаточно очевидна — брать наибольшее по модулю число среди оставшихся. Представим ее в виде таблицы.

раунд	1 игрок	2 игрок
1	-15	-12
2	12	-11
3	11	-10
4	10	9
5	-9	8
6	7	-5
7	3	2
сумма модулей	67	57

Ответ. Не может

8 класс, задача 4

Найдите все функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, принимающие значения $f(d) = e$, $f(e) = d$ при заданных числах d, e .

Ответ: если $d \neq e$, то $f(x) = ax^2 - (1 + ad + ae)x + (d + e + ade)$,
если $d = e$, то $f(x) = ax^2 + bx + (d - ad^2 - bd)$, $a, b \in (-\infty, \infty)$.

8 класс, задача 5

Саша и Маша вскапывали огород на даче, поделив его на две равные по площади части. Каждый должен вскопать свою половину. Саша копает в 1,5 раза быстрее Маши. Когда Саша вскопал $1/3$ своей части огорода, его лопата сломалась, и он стал копать в 1,5 раза медленнее Маши. Кто быстрее вскопал свою половину огорода?

Решение

Примем каждую половину огорода за 3 у.е. площади. Пусть скорость, с которой копает Маша равна v . Тогда на весь огород она затратила $3/v$ единиц времени.

Саша сначала вскопала 1 у.е. площади со скоростью $3v/2$, на что ушло $2/(3v)$ единиц времени. Затем она вскопала 2 у.е. площади со скоростью $2v/3$. На это ушло еще $2/(2v/3) = 3/v$ единиц времени.

Таким образом, Саша затратила времени

$$\frac{2}{3v} + \frac{3}{v},$$

что, очевидно, больше, чем $\frac{3}{v}$.

Ответ. Быстрее вскопала Маша.