ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11101 для 10 класса

1. Существует ли многочлен с целочисленными коэффициентами, который не имеет рациональных корней и имеет ровно три действительных корня? Объясните способ построения такого многочлена и постройте его или докажите невозможность.

Решение. Многочлен нужного вида с двумя иррациональными корнями почти очевиден. Например, можно взять в качестве такового

$$P(x) = x^2 - 2.$$

Для получения третьего корня домножим $P(x)$ на выражение вида $x^3 - a$ при подходящем значении a, например, на $x^3 - 3$.

Поскольку любая кубическая парабола вида $x^3 - a$ имеет ровно один корень, искомый многочлен построен.

Отсутствие у многочлена $x^3 - 3$ иных действительных корней можно проверить аналитически, разделив $x^3 - 3$ на $x - \sqrt[3]{3}$ и проверив отрицательность дискриминанта полученного квадратного трехчлена.

Ответ: например, $(x^2 - 2)(x^3 - 3)$.

2. 2026 положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d. Выясните, зависит ли величина Q от разности d этой прогресси и найдите Q, если

$$Q = \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2026}}}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2026}}}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2026}}}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_4}} + \ldots + \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2026}}}{\sqrt{a_{2025}} + \sqrt{a_{2026}}}.$$

Решение. Вынесем числитель всех дробей, составляющих Q, за скобки и рассмотрим произвольное слагаемое оставшейся суммы. Домножив его на сопряженое выражение, получим

$$\frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} = \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{d}.$$

Теперь вся сумма равна

$$Q = \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2026}}}{d}\left(\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \sqrt{a_4} - \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_{2026}} - \sqrt{a_{2025}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_{2026}}}{d}\left(\sqrt{a_{2026}} - \sqrt{a_1}\right) = \frac{a_{2026} - a_1}{d} = 2025.$$

Ответ: $Q = 2025$, от разности прогрессии не зависит.

3. Африканский животновод Комби Корм получил приплод слонят и бегемотиков. Если бы все новорожденные были слонятами, то общий вес всего приплода был бы на $p\%$ больше, а если бы бегемотиками – на $p\%$ меньше. Во сколько раз вес одного новорожденного слоненка больше веса одного новорожденного бегемотика? (Считайте, если понадобится, всех малышей одного вида одинаковыми.)

Решение

Пусть все слонята весят u, все бегемотики – v, общий привес составляет S, а один слоненок тяжелее одного бегемотика в t раз. Тогда (для $\bar{p} = p/100$)

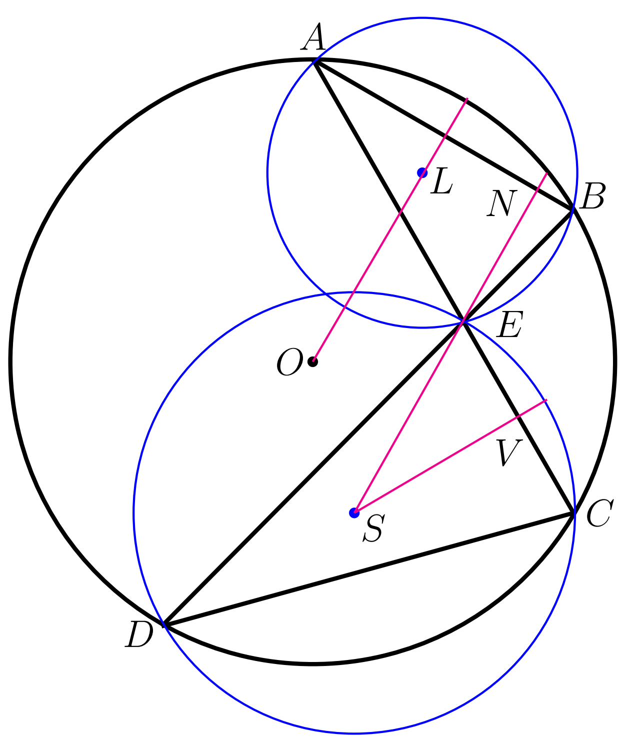
$$\begin{cases} u + v = S, \\ u + tv = (1 + \bar{p})S, \\ \dfrac{u}{t} + v = (1 - \bar{p})S. \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на третье, найдем ответ $t = \dfrac{1 + \bar{p}}{1 - \bar{p}} = \dfrac{100 + p}{100 - p}$.

Ответ: искомое отношение равно $\dfrac{100 + p}{100 - p}$.

4. Хорды AC и BD окружности с центром O пересекаются в точке E. Пусть L, S — центры окружностей, описанных около треугольников AEB и CDE. Докажите, что $OSEL$ — параллелограмм.

Решение



Центр S описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре к CE; обозначим его основание V. Луч SV делит дугу EC пополам, следовательно, $\angle VSE = \angle CDE$. В свою очередь, $\angle CDE = \angle EAB$ как опирающиеся на одну дугу BC.

Обозначим точку пересечения луча SE с хордой AB через N. Треугольники AEN и SEV подобны (равенство $\angle VSE$ и $\angle BAE$ установлено выше, углы при верщине E – накрест лежащие). Следовательно, $SN \perp AB$. Поскольку серединный перпендикуляр OL также перпендикулярен хорде AB, отрезки OL и SE параллельны.

Аналогично доказывается параллельность LE и OS.

5. На посвящении в студенты Паша, Саша, Валя и Женя почистили несколько мешков овощей. Известно, что от одного мешка картофеля остается 5 кг очистков, от одного мешка моркови – 4 кг, от одного мешка лука – 1 кг и от одного мешка помидоров – 2 кг. У каждого получилось различное (по весу) количество отходов общим весом 18 кг. Единственный мешок картофеля достался Паше, а больше всего мешков овощей почистила Саша, получив с них наименьший вес отходов. От помидоров было получено 6 кг очисток. Общий вес отходов у Паши и Жени оказался равным общему весу отходов Саши и Вали. Кто сколько мешков почистил и каких? (10 кл)

Решение

Из условия задачи следует, что было получено 4 группы очистков (по одной группе на абитуриента), вес каждой группы уникален и в сумме дает 18 кг, а две пары групп равновесны (по 9 кг каждая пара). Также известно, что Сашина группа имеет наименьший вес, хотя включает больше всего видов отходов.

Опираясь на эту информацию, следует начать решение задачи с рассмотрения возможных вариантов распределения всех отходов между абитуриентами.

а) *В одной паре первый получил 8 кг очистков, второй – 1 кг.* Противоречит условию, так как 1 кг можно получить только с одного мешка овощей, а 8 кг — не менее, чем с двух, следовательно, минимальный вес отходов не получится с максимального количества мешков.

б) *В одной паре первый получил 7 кг очистков, второй – 2 кг.* Не подходит по тем же соображениям. 7 кг может получиться не менее, чем с двух мешков, а 2 кг — не более, чем с двух, следовательно, минимальный вес отходов не получится с максимального количества мешков.

в) *В одной паре первый получил 6 кг очистков, второй – 3 кг.* Не противоречит условию. 3 кг можно получить с трех мешков, а 6 — с двух.

г) *В одной паре первый получил 5 кг очистков, второй – 4 кг.* Аналогично предыдущему варианту. 4 кг можно получить с двух, трех или четырех мешков, а 5 — с одного или двух.

Таким образом, вес отходов распределяется на 6 кг и 3 кг в одной паре абитуриентов и 5 кг и 4 кг в другой.

Минимальный вес в одной группе отходов 3 кг. Его можно получить двумя или тремя мешками. Если он получен с двух мешков (одного мешка помидоров и одного мешка лука), то все остальные ученики должны были почистить по одному мешку (из соблюдения условия, что минимальный вес получен с максимального количества мешков), но это невозможно: 6 кг можно набрать не менее, чем с двух мешков. Таким образом, Саша почистила 3 мешка лука и получила с них 3 кг очистков.

Саша в паре с Валей получили 9 кг очистков на двоих, следовательно, Валин отход составил 6 кг с двух мешков. Это можно получить, почистив 1 мешок картофеля и 1 мешок лука или 1 мешок моркови и 1 мешок помидоров. Так как известно, что картошку чистил Паша, можно заключить, что Вале достались морковь и помидоры.

Во второй паре ребят Паша чистил картофель и получил с него 5 кг отходов. Тогда Женины очистки весили суммарно 4 кг. Известно, что всего было почищено 3 мешка помидоров; 1 из них чистила Валя, тогда два других достались Жене.

Для наглядности сведем полученные сведения в таблицу:

имя	вес очистков	кол-во почищенных мешков	вид овощей
Паша	5	1	картофель
Саша	3	3	лук
Валя	6	2	помидоры + морковь
Женя	4	2	помидоры

Ответ: Паша почистил 1 мешок картофеля, Саша — 3 мешка лука, Валя — мешок помидоров и мешок моркови, Женя — 2 мешка помидоров.