

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 17661 для 6 класса

1. Чтобы решить, на каком море провести каникулы, Афанасий и Вероника поступают следующим образом: Афанасий называет число, а Вероника возводит его в 2026-ю степень. Если последняя цифра результата окажется меньше пяти, то они поедут на Берингово море, иначе — на Баренцево. Где они проведут лето, если Афанасий назовет число 2027?

Решение

Проанализируем последовательность изменения последней цифры выражения 2027^{2026} :

степень	произведение	последняя цифра
1		7
2	$\dots 7 \cdot 7$	9
3	$\dots 9 \cdot 7$	3
4	$\dots 3 \cdot 7$	1
5	$\dots 1 \cdot 7$	7

Заметим, что последняя цифра при возведении числа в степень изменяется циклично (7 — 9 — 3 — 1) и каждое пятое возведение в степень начинает этот цикл заново. Следовательно, чтобы определить последнюю цифру при возведении в 2026-ю степень, необходимо оценить остаток от деления 2026 на 4:

$$\frac{2026}{4} = 506 \text{ целых, } 2 \text{ в остатке.}$$

Таким образом, последняя цифра будет равна второму числу из цикла, то есть девяти, а, следовательно, Афанасий с Вероникой поедут отдыхать на Баренцево море.

Ответ: на Баренцевом море.

2. На лыжные соревнования «Гони в пургу» прибыли 150 юных спортсменов. Для их проживания на турбазе выделено 2 трехместных номера и 36 четырехместных. При каком количестве юниорок среди них всех прибывших удастся расселить на турбазе, если в один номер можно заселять только спортсменов одного пола? Приведите все возможные варианты.

Решение

Будем рассматривать возможные количества юниорок от 0 до 75, так как, если их количество будет больше половины, из симметрии можно было бы считать количества юношей.

Поскольку количество четырехместных номеров преобладает, будем рассматривать остатки от деления на 4.

остаток	можно ли расселить	3-хмест.	4-хмест.
0	все смогут занять 4-хместные номера	0	все
1	вычитание 9-и человек (расселение их в три 3-хместных номера) даст остаток 0, но у нас всего 2 таких номера	невозможно	
2	вычитание 6-и человек (расселение их в два 3-хместных номера) даст остаток 0	2	все остальные
3	вычитание 3-х человек (расселение их в 3-хместный номер) даст остаток 0	1	все остальные

Так как при анализе остатков мы вычитали 6 человек, следует рассмотреть первые 6 случаев отдельно, чтобы не получить отрицательное количество юниорок:

кол-во юниорок	3-хмест.	4-хмест.	кол-во юниорок	3-хмест.	4-хмест.
0	0	0	3	1	0
1	невозможно		4	0	1
2	невозможно		5	невозможно	

Таким образом, на турбазе удастся расселить всех спортсменов, если юниорок будет любое количество, кроме 2, $150 - 2 = 148$, а также если деление их количества на 4 не будет давать остаток 1.

Ответ: количество юниорок не должно при делении на 4 давать в остатке 1, а также не должно быть равно 2 или 148.

3. Как известно, лошади казаков отличались особой прыткостью и ловкостью, а, следовательно, были очень прожорливы. Чтобы накормить одного коня, было необходимо запастись 2 осьмины зерна; для прокорма четырех коней требовалось 20 осьмин; пяти — 30 осьмин; шести — 42 осьмины; а чтобы наелось 10 казацких коней требовалось 110 осьмин зерна. Сколько целых кадей зерна было необходимо запастись казаку, чтобы накормить тройку лихих коней?

Примечание: 1 кадь = 2 половника = 4 четверти = 8 осьмин \approx 230 кг.

Решение

Выпишем известные данные в таблицу:

кол-во коней	1	4	5	6	10
кол-во зерна	2	20	30	42	110

Видно, что последовательность нелинейна. Попробуем проанализировать квадраты значений количества коней.

кол-во коней	1	4	5	6	10
кол-во коней в квадрате	1	16	25	36	100
кол-во зерна	2	20	30	42	110

Заметим, что значения в нижней строке получаются путем сложения значений в двух первых. Таким образом, количество коней (x) связано с количеством необходимого корма (y) соотношением

$$y = x^2 + x.$$

Тогда для прокорма трех лошадей потребуется $3^2 + 3 = 12$ осьмин зерна, что соответствует $\frac{12}{8} = 1.5$ калям. Следовательно, для прокорма тройки лихих коней потребуется запастись 2 целые кади зерна.

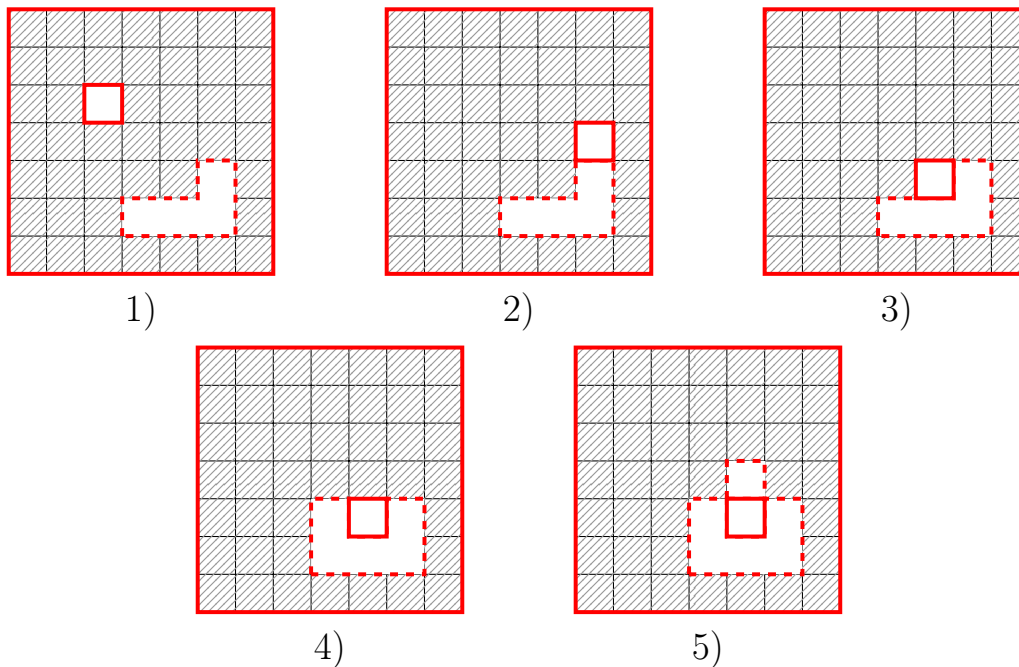
Ответ: 2 кади.

4. Однажды Пончик, оголодав, залез в кладовую Сиропчика и в ее недрах раскопал залежи плиточного шоколада. Чтобы урон не был замечен, Пончик не ел плитки целиком. Взяв квадратную шоколадку размером 7×7 , он выгрызал из нее несколько кусочков 1×1 , но не ел крайние. Мог ли он выгрызть кусочки так, чтобы величина площади оставшейся части была численно равна длине ее периметра?

Примечание: Не стоит забывать, что если у кусочка шоколадки нет ни одного соседа по стороне, то он выпадает из плитки и не участвует в подсчете оставшейся части.

Решение

Заметим, что выгрызание одного (любого) кусочка шоколадки уменьшает площадь оставшейся части на 1, а длина периметра при этом может измениться по-разному. Рассмотрим все случаи:



1) Выгрызание отдельно стоящего кусочка увеличивает длину периметра на 4 единицы.

2) Выгрызание кусочка, имеющего одного выгрызенного соседа по стороне, увеличивает длину периметра на 2 единицы.

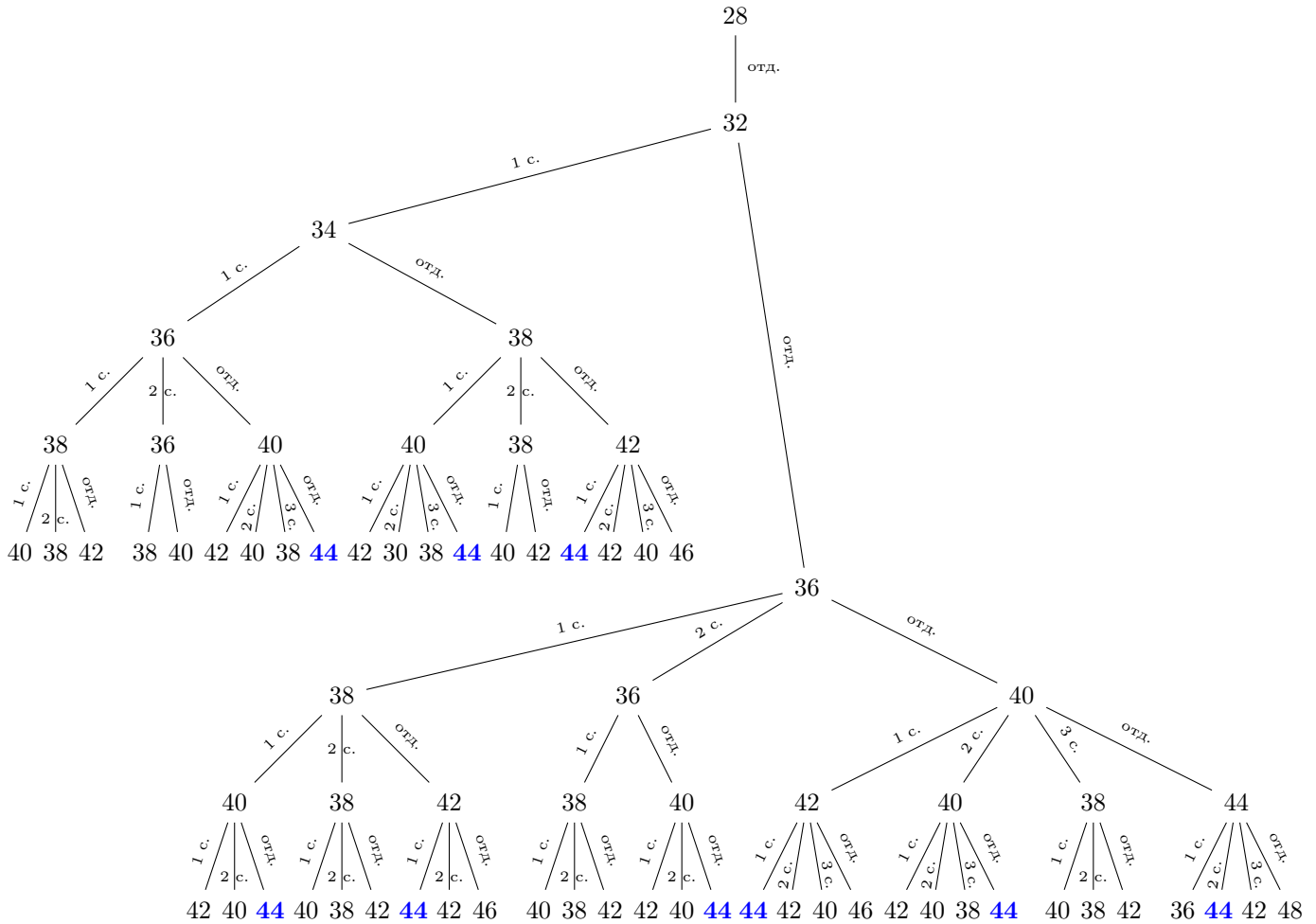
3) Выгрызание кусочка, имеющего двух выгрызенных соседей по стороне, не изменяет длину периметра.

4) Выгрызание кусочка, имеющего трех выгрызенных соседей по стороне, уменьшает длину периметра на 2 единицы.

5) Выпадение кусочка (в случае выгрызания всех четырех соседей), имеющего четырех выгрызенных соседей по стороне, уменьшает длину периметра на 4 единицы.

До начала поедания шоколадки площадь оставшейся части равна $S = 7 \cdot 7 = 49$ квадратных единиц, длина периметра равна $P = 7 \cdot 4 = 28$ единиц.

Опираясь на вышеизложенные сведения, построим дерево решения задачи:



Переход по ребру дерева означает выгрызание кусочка шоколадки. Пометки на ребрах означают положение выгрызаемого кусочка относительно уже выгрызенных: «отд.» — отдельно стоящий; «1 с.» — есть один выгрызенный сосед по стороне; «2 с.» — есть два соседа; «3 с.» — есть три соседа. В вершинах указаны значения длины периметра; значение величины площади уменьшается на единицу при каждом выгрызании. Синим помечены значения длины периметра, равные величине площади на данном шаге.

Таким образом, у Пончика есть несколько способов выгрызть кусочки так, чтобы величина площади оставшейся части была численно равна длине ее периметра. В качестве ответа достаточно привести любой из них.

Ответ: Да, мог. Например, если бы выгрыз 5 кусочков: 1 отдельный и 2 раза 2 соседних, не допустив их соприкосновения по стороне.

5. Победитель турнира по Dota 2 подсчитал, что 3 лекции, 7 семинаров и 5 лабораторных занятий отнимают столько же времени от тренировочного процесса за 7 дней, сколько 1 лекция, 5 семинаров и 8 лабораторных занятий за 5 дней; а 5 лекций, 2 семинара и 1 лабораторное занятие отнимают столько же времени за 10 дней, сколько 4 лекции, 1 семинар и 27 лабораторных занятий за 20 дней. Какой вид учебной деятельности более губителен для тренировочного процесса?

Решение

Запишем исходные данные в виде системы равенств:

$$\begin{cases} \frac{3A + 7B + 5C}{7} = \frac{1A + 5B + 8C}{5}; \\ \frac{5A + 2B + 1C}{10} = \frac{4A + 1B + 27C}{20}, \end{cases}$$

где A — «вред» от лекции; B — «вред» от семинара; C — «вред» от лабораторного занятия. Каждая дробь обозначает суммарный «вред» от учебного процесса за один день.

Домножим обе части первого равенства на 35, обе части второго на 20:

$$\begin{cases} 15A + 35B + 25C = 7A + 35B + 56C; \\ 10A + 4B + 2C = 4A + 1B + 27C. \end{cases}$$

Уберем из обеих частей первого равенства $7A$, $35B$ и $25C$, из второго — $4A$, $1B$ и $2C$ (например, прогуляем эти занятия).

$$\begin{cases} 8A = 31C; \\ 6A + 3B = 25C. \end{cases}$$

Выразим A из первого равенства и подставим во второе:

$$\begin{cases} A = \frac{31}{8}C; \\ \frac{93C}{4} + 3B = 25C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{31}{8}C; \\ C = \frac{12}{7}B, \end{cases} \Rightarrow A = \frac{31 \cdot 12}{8 \cdot 7}B = \frac{31}{8}C.$$

Отсюда видно, что посещение лекции (A) более губительно для тренировочного процесса, нежели посещение лабораторного занятия (C), а посещение семинара (B) несет наименьший «вред».

Ответ: для тренировочного процесса более губительно посещение лекций.