ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11771 для 7 класса

1. На лыжные соревнования «Гони в пургу» прибыло 200 юных спортсменов. Для их проживания на турбазе выделено 4 трехместных номера и 47 четырехместных. При каком количестве юниорок всех прибывших удастся расселить на турбазе, если в один номер можно заселять только спортсменов одного пола? Приведите все возможные варианты.

Решение

Будем рассматривать возможные количества юниорок от 0 до 100, так как, если их количество будет больше половины, из симметрии можно было бы считать количества юношей.

Поскольку количество четырехместных номеров преобладает, будем рассматривать остатки от деления на 4.

остаток	можно ли расселить	3-хмест.	4-хмест.
0	все смогут занять 4-хместные номера	0	все
1	вычитание 9-и человек (расселение их в три 3-хместных номера) даст остаток 0	3	все остальные
2	вычитание 6-и человек (расселение их в два 3-хместных номера) даст остаток 0	2	все остальные
3	вычитание 3-х человек (расселение их в 3-хместный номер) даст остаток 0	1	все остальные

Так как при анализе остатков мы вычитали 9 человек (или меньше), следует рассмотреть первые 9 случаев отдельно, чтобы не получить отрицательное количество юниорок:

кол-во юниорок	3-хмест.	4-хмест.	кол-во юниорок	3-хмест.	4-хмест.	кол-во юниорок	3-хмест.	4-хмест.
0	0	0	3	1	0	6	2	0
1	невозможно		4	0	1	7	1	1
2	невозможно		5	невозможно		8	0	2

Таким образом, на турбазе удастся расселить всех спортсменов при любом количество юниорок, кроме 1, 2, 5 и симметрично $200 - 5 = 195$, $200 - 2 = 198$, $200 - 1 = 199$.

Ответ: при любом, кроме 1, 2, 5, 195, 198, 199.

2. Спортсмен выходил на тренировки в течение пяти недель, причем на каждой следующей неделе количество тренировок было меньше, чем на предыдущей, а на пятой неделе их оказалось в три раза меньше, чем на первой. Сколько раз спортсмен тренировался на второй неделе, если всего за этот период у него было 33 тренировки? (Перечислите все возможные варианты ответа.)

Решение

Пусть на пятой неделе у спортсмена было a тренировок. Тогда на четвертой их было не менее, чем $a+1$, на третьей – не менее $a+2$, на второй – не менее $a+3$, а на первой – ровно $3a$. Таким образом, всего было не менее $7a+6$ тренировок.

При $a = 4$ полученная оценка снизу дает величину $7 \cdot 4 + 6 = 34$, что больше, чем 33. Следовательно, $a \leqslant 3$.

Если $a = 1$, то между 1 и 3 не найдется трех различных целых чисел. Если $a = 2$, то возможна только комбинация 6, 5, 4, 3, 2, которая в сумме меньше 33.

Следовательно, $a = 3$ и количества тренировок в недели со второй по четвертую (в сумме дающие $33 - 3 - 9 = 21$) нужно выбрать из чисел 4, 5, 6, 7, 8. Это возможно только для тройки 6, 7, 8.

Ответ: 8 раз.

3. В 7:00 на табло были высвечены числа 2, 5 и 3. В этот момент между каждой парой соседних чисел появилась их сумма, а крайние числа погасли. Получилась запись 7, 5, 8. Затем каждый час процедура повторялась: между каждой парой соседних чисел появлялась их сумма, после чего крайние числа гасли. Чему будет равна сумма всех чисел на табло в 7:15 следующего утра?

Решение

Пусть в какой-то момент написаны числа a, b и c, сумма которых $S_1 = a + b + c$. Тогда после одного подхода появятся три числа

$$a + b, \quad b, \quad , b + c$$

(крайние a и c будут стерты). Сумма новых чисел

$$S_2 = (a + b) + b + (b + c) = a + b + c + 2b = S_1 + 2b.$$

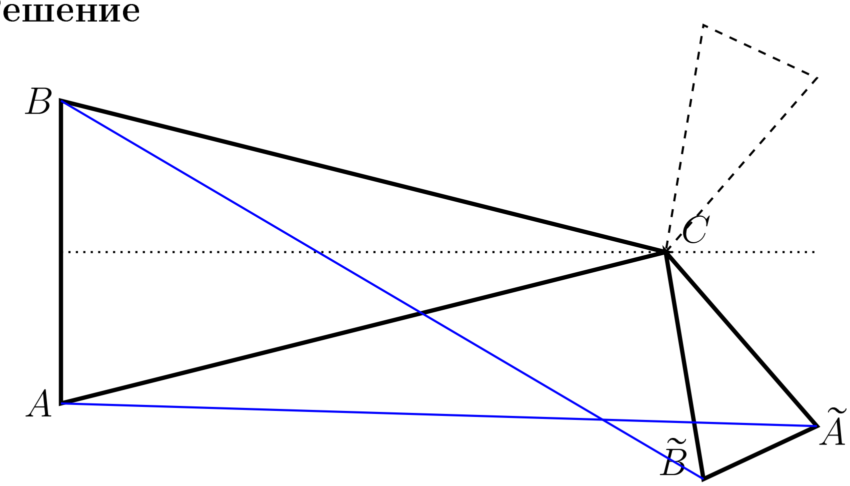
Таким образом, среднее число всегда сохраняется, а сумма каждый раз увеличивается на $2b$.

После 7 утра останутся числа 7, 5 и 8, сумма которых равна 20. По условию $2b = 10$, а записи менялись 24 раза. Поэтому начальная сумма увеличится на 240 и к указанному времени будет равна 260.

Ответ: 260, $S_{n+1} = S_n + 10 = S_1 + 10n$, $S_1 = 20$.

4. Равнобедренный треугольник с углом при основании AB, равным $72°$, сначала повернули относительно вершины C на некоторый угол. После уменьшили в три раза так, что его форма, а также положение вершины C не изменились. Затем отразили симметрично относительно медианы CM исходного треугольника ABC и, наконец, отразили симметрично относительно своей собственной медианы. При этом вершины A и B переместились в точки $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$. Определите, какая из точек ($\widetilde{A}$ или $\widetilde{B}$) оказалась дальше от своего начального положения, и найдите отношение длин отрезков $A\widetilde{A}$ и $B\widetilde{B}$.

Решение



Для симметричного относительно своей медианы равнобедренного треугольника описанные действия эквивалентны одному повороту на такой же угол в противоположную сторону. Итоговое положение изображено на рисунке сплошным контуром (для наглядности пунктиром изображено положение после первого поворота и масштабирования).

Построим отрезки $A\widetilde{A}$ и $B\widetilde{B}$, которые необходимо сравнить.

Рассмотрим треугольники $AC\widetilde{A}$ и $BC\widetilde{B}$. Так как

$$\angle AC\widetilde{A} = \angle AC\widetilde{B} + \angle \widetilde{B}C\widetilde{A}, \qquad \angle BC\widetilde{B} = \angle BCA + \angle AC\widetilde{B}$$

и, дополнительно, $\angle BCA = \angle \widetilde{B}C\widetilde{A}$, то $\angle AC\widetilde{A} = \angle BC\widetilde{B}$.

Из равнобедренности следует, что $BC = AC$, $\widetilde{B}C = \widetilde{A}C$ Таким образом, треугольники $AC\widetilde{A}$ и $BC\widetilde{B}$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Следовательно, $A\widetilde{A} = B\widetilde{B}$.

Ответ: расстояния равны, $A\widetilde{A}/B\widetilde{B} = 1$.

5. Докажите, что каковы бы ни были положительные числа a, b и c, верно неравенство

$$\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2} \leqslant 1.$$

Укажите также все возможные условия на a, b и c, при которых неравенство становится равенством.

Решение

Перепишем неравенство в эквивалентном виде (в силу положительности знаменателя)

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc.$$

Умножим неравенство на 2 и перенесем все в одну сторону. Получим

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc \geqslant 0.$$

Перераспределим слагаемые и воспользуемся формулой квадрата разности.

$$\begin{aligned}&2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc = \\ &\qquad (a^2-2ab+b^2)+(a^2-2ac+c^2)+b^2-2bc+c^2) = \\ &\qquad\qquad (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\end{aligned}$$

Неравенство

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0$$

не вызывает сомнений.

Сумма трех квадратов может быть равна нулю только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Это, в свою очередь, означает, что $a=b=c$.

Ответ: равенство только при $a=b=c$.