ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17101 для 10 класса

Решение

Задача 1

Энергетические затраты Сиропчика во время еды пропорциональны кубу объема съедаемой порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть бидончик мороженого как одну порцию или разделить его на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении на две порции?

Решение. Примем всю еду за единицу. Пусть она разделена на части объемом x и y ($x + y = 1$). Пусть $y = cx$ ($c > 0$). Тогда при съедании всего одной порцией затраты составят $S_1 = \alpha(x + cx)^3$, а при разделении на две порции составят $S_2 = \alpha x^3 + \alpha(cx)^3$. Требуется исследовать отношение этих величин. Выполним преобразования.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\alpha(x^3 + c^3x^3)}{\alpha(x + cx)^3} = \frac{1 + c^3}{1 + 3c + 3c^2 + c^3} = \frac{1}{1 + \dfrac{3c + 3c^2}{1 + c^3}}.$$

Очевидно, что полученная величина меньше единицы. Для оценки снизу преобразуем дробь из знаменателя.

$$\frac{3c + 3c^2}{1 + c^3} = \frac{3c(1 + c)}{(1 + c)(1 - c + c^2)} = \frac{3}{1/c + c - 1}.$$

Величина $1/c + c \geq 2$, поэтому $\dfrac{3}{1/c + c - 1} \leq 3$ и, далее,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{3}{1/c + c - 1}} \geq \frac{1}{4}.$$

Таким образом, $S_1 > S_2 \geq \dfrac{1}{4}S_1.$

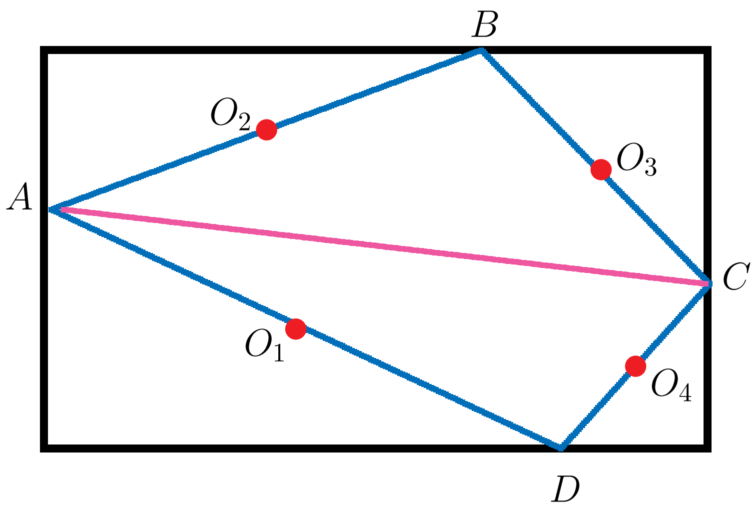
Ответ. Уменьшатся в 4 раза (максимально). Выгоднее съесть как две порции.

Задача 2

На каждой из сторон прямоугольника выбрано по произвольной точке. Точки на соседних сторонах прямоугольника соединены отрезками прямых. В результате от прямоугольника оказываются отсеченными четыре треугольника. Вокруг каждого из этих треугольников описана окружность. Докажите, что центры этих окружностей являются вершинами некоторого параллелограмма.

Решение.

Отрезки, отсекающие треугольники, являются вершинами некоторого четырехугольника $ABCD$. Отметим также центры всех описанных окружностей $O_1, \ldots, O_4$.



Поскольку все отсекаемые треугольники прямоугольные, центры окружностей лежат на серединах их гипотенуз. Проведем диагональ AC. Отрезки O_2O_3 и O_1O_4 являются средними линиями треугольников ABC и ADC, следовательно, они параллельны AB (т.е., друг другу) и равны половине AB (т.е., друг другу).

Аналогично доказывается параллельность и (или) равенство отрезков O_1O_2 и O_4O_3. Таким образом, $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм.

Задача 3

3. Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \cdots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2022} - x^{2021}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a.

Решение.

Докажем, что если x целое, d натуральное, то

$$\left[\frac{x}{d}\right] + \left[\frac{x+1}{d}\right] + \cdots + \left[\frac{x+d-1}{d}\right] = x. \qquad (*)$$

Представим x в виде $x = kd + m$, где $k \in \mathbb{Z}$ (неполное частное), $m \in \{0, 1, \ldots, d-1\}$ (остаток). Тогда величины

$$\left[\frac{x}{d}\right], \left[\frac{x+1}{d}\right], \ldots, \left[\frac{x+(d-m-1)}{d}\right]$$

будут равны k. Их количество равно $d - m$.

Величины

$$\left[\frac{x+(d-m)}{d}\right], \ldots, \left[\frac{x+(d-1)}{d}\right]$$

будут равны $k+1$. Их количество равно m.

Итого получаем

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \cdots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = k \cdot (d-m) + (k+1) \cdot m = kd + m = x.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$x = x^{2022} - x^{2021}.$$

Одно его решение ($x = 0$) очевидно.

Пусть $x \neq 0$. Тогда

$$1 = x^{2020}(x-1).$$

Поскольку искомое решение x должно быть целочисленным, то $x^{2020} \in \mathbb{Z}$, $x - 1 \in \mathbb{Z}$. Произведение двух целых чисел может быть равно 1 только когда каждое из них равно 1. Но такое невозможно.

Ответ. $x = 0$.

Задача 4

Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали четверо, и Незнайке удалось установить следующее.

(1) Если алиби Пончика истинно, то Сиропчик также имеет алиби.

(2) Если Пончик ел корм, то либо Сиропчик, либо Авоська тоже ел корм

(либо оба вместе).

(3) Из двух показаний: «Авоська ел корм», «Пончик не ел, но при этом ел Небоська» – хотя бы одно истинное.

(4) Если Небоська ел корм, то также ел либо Авоська, либо Сиропчик (либо оба вместе).

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить в поедании за ночь целого куля собачьего корма?

Решение.

Начнем с (3). Пусть Авоська не ел корм. Тогда Пончик не ел, а Небоська ел. Из (4) получаем, что либо Авоська ел, либо Сиропчик. При сделанном предположении это означает, что ел Сиропчик. Но из (1) следует, что Сиропчик не ел корм, т.к. Пончик не ел. Получено противоречие. Следовательно, Авоська виновен (корм ел).

Если рассмотреть все варианты для трех оставшихся подозреваемых,

	Авоська	Небоська	Пончик	Сиропчик	
1	ел	ел	ел	ел	
2	ел	ел	ел	нет	
3	ел	ел	нет	ел	невозможно в силу (1)
4	ел	ел	нет	нет	
5	ел	нет	ел	ел	
6	ел	нет	ел	нет	
7	ел	нет	нет	ел	невозможно в силу (1)
8	ел	нет	нет	нет	

то можно убедиться, что каждый из подозреваемых мог как есть, так и не есть корм.

Ответ. Авоська точно ел, про остальных сделать вывод невозможно.

Задача 5

Будем говорить, что функции $f(t)$ и $F(x, y)$ образуют «пару рассеянных собеседников», если для всех допустимых чисел x, y выполняется условие

$$f(F(x, y)) = F(f(x), f(y)). \quad (1)$$

А. Приведите пример пары рассеянных собеседников.

Б. Выясните, существует ли функция $F(x, y) = Ax + By + C$, образующая «пары рассеянных собеседников» со всеми функциями вида $f(x) = cx + d$.

Решение.

1. $f(x) = x^2,\ F(x,y) \equiv 0.$

2. В условие (1) подставим $f(x) \equiv 0$, получим $C = 0$, $F(x,y) = Ax + By$, а условие (1) преобразуется в

$$Af(x) + Bf(y) = f(Ax + By). \tag{2}$$

3. В условие (2) подставим $x = y = 0$, получим

$$Af(0) + Bf(0) = f(0). \tag{3}$$

4. В (3) подставим функцию $f(x)$ такую, что $f(0) \neq 0$. Тогда, сократив (3) на $f(0)$, получим $A + B = 1$, $B = 1 - A$, $F(x,y) = Ax - y - Ay$ и условие (1) превращается в верное тождество при любом A.

5. В качестве примера можно взять $A = \frac{1}{2}$ (тогда $B = \frac{1}{2}$).

Ответ.

1. $f(x) = x^2,\ F(x,y) \equiv 0$ (**возможны другие примеры!**) .

2. Да, например $F(x,y) = (x+y)/2$ (**возможны другие примеры!**)