Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса

Решение

Задача 1

Энергетические затраты Пончика во время еды пропорциональны корню квадратному из объема съедаемой порции. Что выгоднее для экономии энергетического запаса: съесть свежую кулебяку как одну порцию или разделить ее на две? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменятся затраты при разделении кулебяки на две порции?

Решение. Примем всю еду за единицу. Пусть она разделена на части объемом x и y $(x+y=1)$. Пусть $y=cx$ $(c>0)$. Тогда при съедании всего одной порцией затраты составят $S_1=\alpha\sqrt{x+cx}$, а при разделении на две порции составят $S_2=\alpha\sqrt{x}+\alpha\sqrt{cx}$. Требуется исследовать отношение этих величин. Для удобства рассмотрим квадрат их отношения

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2=\frac{\alpha^2(\sqrt{x}+\sqrt{cx})^2}{\alpha^2\sqrt{x+cx}^{\,2}}=\frac{(1+\sqrt{c})^2}{1+c}=\frac{1+c+2\sqrt{c}}{1+c}=1+\frac{2}{1/\sqrt{c}+\sqrt{c}}.$$

Величина $1/\sqrt{c}+\sqrt{c}\geq 2$, поэтому

$$\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2=1+\frac{2}{1/\sqrt{c}+\sqrt{c}}\leq 2.$$

Таким образом, $1<\dfrac{S_2}{S_1}\leq\sqrt{2}$.

Ответ. Увеличатся в $\sqrt{2}$ раз (максимально). Выгоднее съесть как одну порцию.

Задача 2

Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right]+\left[\frac{x+1}{2022}\right]+\cdots+\left[\frac{x+2021}{2022}\right]=\frac{\lg(2^x+1)-\lg 6}{\lg 5-\lg 10}.$$

Через $[a]$ здесь обозначена целая часть числа a.

Решение.

Докажем, что если x целое, d натуральное, то

$$\left[\frac{x}{d}\right]+\left[\frac{x+1}{d}\right]+\cdots+\left[\frac{x+d-1}{d}\right]=x. \qquad (*)$$

Представим x в виде $x=kd+m$, где $k\in\mathbb{Z}$ (неполное частное), $m\in\{0,1,\ldots,d-1\}$ (остаток). Тогда величины

$$\left[\frac{x}{d}\right],\left[\frac{x+1}{d}\right],\ldots,\left[\frac{x+(d-m-1)}{d}\right]$$

будут равны k. Их количество равно $d-m$.

Величины

$$\left[\frac{x+(d-m)}{d}\right],\ldots,\left[\frac{x+(d-1)}{d}\right]$$

будут равны $k+1$. Их количество равно m.

Итого получаем

$$\left[\frac{x}{2022}\right]+\left[\frac{x+1}{2022}\right]+\cdots+\left[\frac{x+2021}{2022}\right]=k\cdot(d-m)+(k+1)\cdot m=kd+m=x.$$

Преобразуем правую часть уравнения.

$$\frac{\lg(2^x+1)-\lg 6}{\lg 5-\lg 10}=\frac{\lg[(2^x+1)/6]}{\lg 1/2}=-\log_2[(2^x+1)/6].$$

Таким образом, приходим к уравнению $\log_2[(2^x+1)/6]=-x$, эквивалентному $2^x+1=6\cdot 2^{-x}$.

Обозначая $t=2^x$ и решая полученное квадратное уравнение, находим, что $2^x=2$ (другой корень не подходит по знаку).

Следовательно, единственное решение $x=1$.

Ответ. $x=1$.

Задача 3

Колхоз имени Лопе де Вега планирует построить на своих землях два одинаковых прямоугольных в плане розария и квадратный в плане свинарник. Сумма периметров розариев должна быть больше периметра свинарника на 16 м, а суммарная площадь розариев превышать площадь свинарника на 16 кв. м. Если такой план может быть реализован, то найдите длины сторон всех строений. Если план нереален, то объясните почему.

Решение. Обозначим стороны прямоугольников через x и y, сторону квадрата через a и составим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(2x+2y)-4a=16, \\ 2xy-a^2=16. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y-a=4, \\ 2xy-a^2=16. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения $x=4+a-y$ и подставим во второе.

$$2(4+a-y)y-a^2=16 \quad \Leftrightarrow \quad -2y^2+2(a+4)y-a^2-16.$$

Это квадратное относительно y уравнение. Оно имеет решение, если его дискриминант неотрицателен. Дискриминант (без учета множителя 2) равен

$$(a+4)^2-2a^2-32=a^2+8a+16-2a^2-32=-(a-4)^2.$$

Отсюда сразу получаем, что $a=4$ и для поиска сторон прямоугольника систему

$$\begin{cases} x+y=8, \\ 2xy=32, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $x=y=4$.

Ответ. Все помещения – квадраты со стороной 4 ед. длины.

Задача 4

На каждой из сторон параллелограмма выбрано по произвольной точке. Точки на соседних сторонах параллелограмма соединены отрезками прямых. В результате от параллелограмма оказываются отсеченными четыре треугольника. Вокруг каждого из этих треугольников описана окружность. Докажите, что центры этих окружностей являются вершинами некоторого параллелограмма.

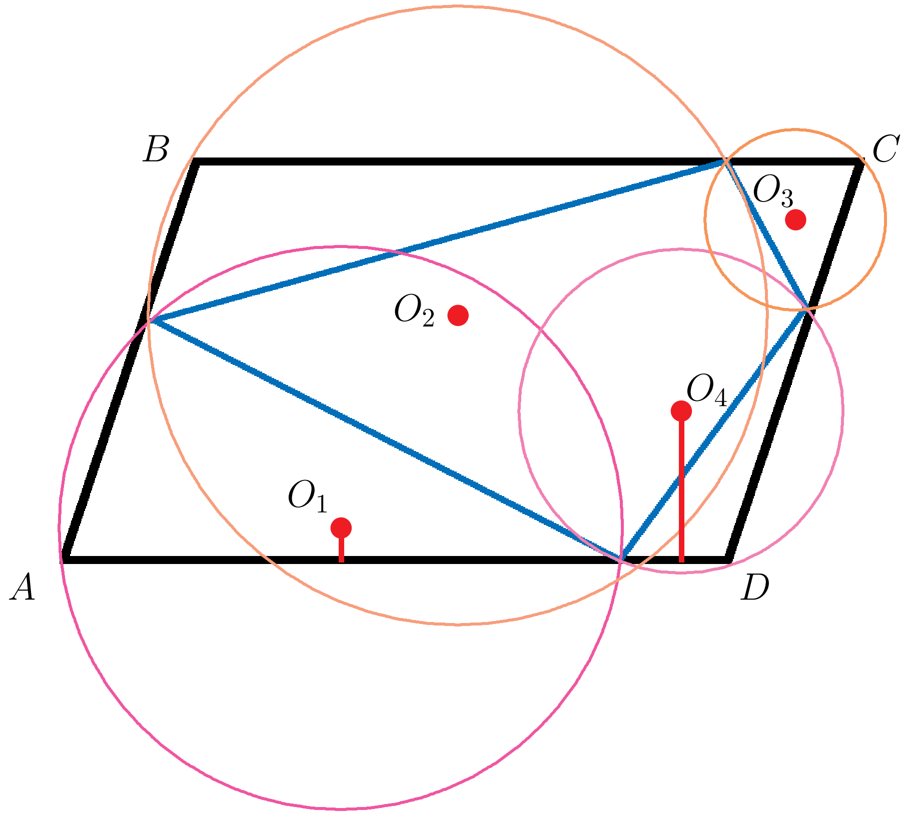
Решение.

Изобразим окружности и их центры, которые обозначим $O_1, \ldots, O_4$.

Рассмотрим векторы O_1O_2, O_4O_3 и O_1O_4, O_2O_3.

Поскольку центры описанных окружностей лежат на пересечении серединных перпендикуляров, проекции указанных векторов на стороны исходного параллелограмма будут равны половине этих сторон.

Таким образом, если ввести две оси: одну параллельно стороне AB, а другую параллельно стороне AD, то каждая пара рассматриваемых векторов будет иметь одинаковые проекции на каждую из введенных осей. Отсюда следует попарное равенство самих векторов.



Равенство же противоположных сторон приводит к тому, что $O_1O_2O_3O_4$ – параллелограмм.

Задача 5

Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали четверо, и Незнайке удалось установить следующее.

(1) Если алиби Пончика истинно, то Сиропчик также имеет алиби.

(2) Если Пончик ел корм, то либо Сиропчик, либо Авоська тоже ел корм (либо оба вместе).

(3) Из двух показаний: «Авоська ел корм», «Пончик не ел, но при этом ел Небоська» – хотя бы одно истинное.

(4) Если Небоська ел корм, то также ел либо Авоська, либо Сиропчик (либо оба вместе).

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить в поедании за ночь целого куля собачьего корма?

Решение.

Начнем с (3). Пусть Авоська не ел корм. Тогда Пончик не ел, а Небоська ел. Из (4) получаем, что либо Авоська ел, либо Сиропчик. При сделанном предположении это означает, что ел Сиропчик. Но из (1) следует, что Сиропчик не ел корм, т.к. Пончик не ел. Получено противоречие. Следовательно, Авоська виновен (корм ел).

Если рассмотреть все варианты для трех оставшихся подозреваемых,

	Авоська	Небоська	Пончик	Сиропчик	
1	ел	ел	ел	ел	
2	ел	ел	ел	нет	
3	ел	ел	нет	ел	невозможно в силу (1)
4	ел	ел	нет	нет	
5	ел	нет	ел	ел	
6	ел	нет	ел	нет	
7	ел	нет	нет	ел	невозможно в силу (1)
8	ел	нет	нет	нет	

то можно убедиться, что каждый из подозреваемых мог как есть, так и не есть корм.

Ответ. Авоська точно ел, про остальных сделать вывод невозможно.