ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17091 для 9 класса

Решение

Задача 1

Пусть четырехзначные числа n, k, m обозначают различные годы XXI века, отличающиеся друг от друга на 5 лет, причем хотя бы одно из них оканчивается нулем. Докажите, что произведение nkm делится на 750.

Решение

Разложим делитель на множители: $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$.

Согласно условию, можно представить заданные числа как $5(s-1)$, $5s$ и $5(s+1)$, где $s \in \mathbb{N}$. Тогда $nkm = 5^3(s-1)s(s+1)$.

Произведение трех последовательных чисел делится на 3, а также на 2, поэтому заданное произведение можно представить в виде

$$nkm = 5^3(s-1)s(s+1) = 5^3 \cdot 6 \cdot t = 750 \cdot t, \quad t \in \mathbb{N}.$$

Задача 2

Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Найдите все целочисленные решения данного уравнения, если таковые существуют.

$$\left[\frac{x}{2022}\right] + \left[\frac{x+1}{2022}\right] + \dots + \left[\frac{x+2021}{2022}\right] = x^{2023}.$$

Решение.

Докажем, что если x целое, d натуральное, то

$$\left[\frac{x}{d}\right] + \left[\frac{x+1}{d}\right] + \dots + \left[\frac{x+d-1}{d}\right] = x. \qquad (*)$$

Представим x в виде $x = kd + m$, где $k \in \mathbb{Z}$ (неполное частное), $m \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ (остаток). Тогда величины

$$\left[\frac{x}{d}\right], \left[\frac{x+1}{d}\right], \dots, \left[\frac{x+(d-m-1)}{d}\right]$$

будут равны k. Их количество равно $d-m$.

Величины

$$\left[\frac{x+(d-m)}{d}\right], \dots, \left[\frac{x+(d-1)}{d}\right]$$

будут равны $k+1$. Их количество равно m.

Итого получаем

$$\left[\frac{x}{2022}\right]+\left[\frac{x+1}{2022}\right]+\dots+\left[\frac{x+2021}{2022}\right]=k\cdot(d-m)+(k+1)\cdot m=kd+m=x.$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$x=x^{2023},$$

которое имеет три решения $x=0,\pm 1$.

Ответ. $x=-1,0,1$.

Задача 3

Охотник Пулька для своей собаки Бульки заказал на АлиЭкспресс три куля собачьего корма. Наутро после доставки один куль оказался съеден. Под подозрение попали Торопыжка, Пончик и Сиропчик. Незнайка опросил свидетелей и установил следующее.

(1) Если Пончик ел корм, то Сиропчик не ел его.

(2) Свидетельства о том, что Пончик не ел и что Торопыжка не ел корм не могут быть истинными одновременно.

(3) Если Сиропчик не ел корм, то Пончик не ел его, а Торопыжка ел.

Кого из подозреваемых Незнайка может гарантированно обвинить или оправдать в поедании ночью целого куля собачьего корма?

Решение.

Если Пончик ел корм, то из (1) и (3) следует, что Пончик не ел корм. Следовательно, Пончик не ел.

Тогда из (2) следует, что Торопыжка ел корм.

Утверждения о том, что Сиропчик ел корм, также как и о том, что Сиропчик не ел корм могут быть истинными при выполнении **всех** условий (1) – (3).

Таким образом, Торопыжка ел корм, Пончик не ел, а про Сиропчика сделать вывод невозможно.

ИЛИ

Составим таблицу всех вариантов

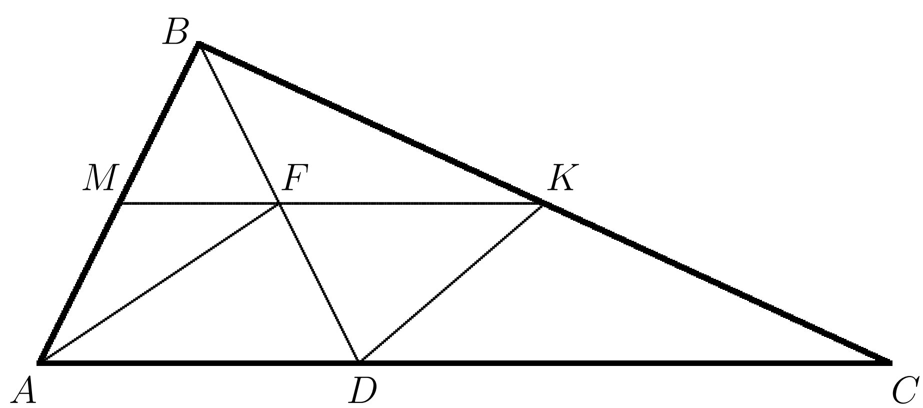
	Пончик	Сиропчик	Торопыжка	
1	ел	ел	ел	невозможно в силу (1)
2	ел	ел	нет	невозможно в силу (1)
3	ел	нет	ел	невозможно в силу (3)
4	ел	нет	нет	невозможно в силу (3)
5	нет	ел	ел	
6	нет	ел	нет	невозможно в силу (2)
7	нет	нет	ел	
8	нет	нет	нет	невозможно в силу (2)

Ответ. Пончик не ел, Торопыжка ел, а про Сиропчика сделать вывод невозможно.

Задача 4

В треугольнике ABC сторона AB вдвое короче стороны BC. Биссектриса BD пересекается со средней линией KM (точка K лежит на BC, а M на AB) в точке F. Докажите, что четырехугольник $AFKD$ – ромб.

Решение



Треугольники ABF и KBF равны по двум сторонам ($AB = BK$ по условию, BF – общая) и углу между ними (BD – биссектриса).

Следовательно, $AF = FK$ и $\angle BFA = \angle BFK$. Это равенство углов влечет за собой равенство смежных к ним углов: $\angle DFA = \angle DFK$. Поскольку средняя линия параллельна основанию, то $\angle DFK = \angle ADF$, что вместе с предыдущим равенством доказывает равнобедеренность $\triangle FAD$.

Из равенства треугольников ABD и KBD (доказывается аналогично) следует, далее, что $KD = AD = AF = FK$. Отсюда и из того, что $FK \parallel AD$, выводится, что $AFKD$ – ромб.

Задача 5

Удовольствие, получаемое от каникул, пропорционально квадрату их продолжительности. Что выгоднее для увеличения удовольствия: устроить неразрывные каникулы или разделить их на две части? В какое максимальное количество раз (и в какую сторону) изменится удовольствие при разделении на две части?

Решение. Примем продолжительность неразрывных каникул за единицу. Пусть она разделена на части объемом x и y ($x + y = 1$). Пусть $y = cx$ ($c > 0$). Тогда при съедании всего одной порцией затраты составят $S_1 = \alpha(x + cx)^2$, а при разделении на две порции составят $S_2 = \alpha x^2 + \alpha(cx)^2$. Требуется исследовать отношение этих величин. Выполним преобразования.

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\alpha(x^2 + c^2x^2)}{\alpha(x + cx)^2} = \frac{1 + c^2}{1 + 2c + c^2} = \frac{1}{1 + \dfrac{2c}{1 + c^2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{1/c + c}}.$$

Очевидно, что полученная величина меньше единицы. Для оценки снизу воспользуемся тем, что величина $1/c + c \geq 2$, поэтому

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{1 + \dfrac{2}{1/c + c}} \geq \frac{1}{2}.$$

Ответ. Уменьшатся в 2 раза (максимально). Выгоднее устроить неразрывные.