Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

№ группы	Место проведения
M11F02	Дистанционно, с использованием ВКС

шифр: 2А 48-39

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Исаева

ИМЯ Ольга

ОТЧЕСТВО Игоревна

Дата рождения 31.05.2006 Класс: 11

Предмет Математика Этап: Заключительный

Работа выполнена на 7 листах Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ZA48-39

№1

Из 10 дней: { 4 голодных
6 обжорных

Найти кол-во способов (N) распределения, чтобы не было более 2-х голодных подряд.

① Общее число комбинаций:

$\frac{10!}{4!\,6!}$ — кол-во перестановок по 10 позициям без учета того, что есть одинак. дни

число перестан. ~~повторяющ~~ (одинак). голодных дней

число (одинак) обжорных (перестановки)

⇒ получим общее количество комбинац. голодных и обжорн дней.

② Теперь найдем кол-во комбинац не удовлетворяющ. желаемому распределению дней:] объединим 3 голодных дня в 1 позицию.

$\frac{8!}{6!}$ — кол-во комбинаций с объединением из 3-х голодных дней

число общих перест. (n)

6! — число перестановок обжорных т. к. одинак

но мы учитываем 2 раза случай с 4 голодными подряд:

n: г (г г г) n+1 — 4. голодных

n: (г г г) г n+1 — 4 голодных

— на одинак позициях

вычтем число перестановок 4 голодных дней: аналогично:] 4 голодных — 1 позиц.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

и

кол-во перестановок.

$\frac{7!}{6!}$ — число перестановок (комбинаций) с 4-мя в 1 позиции.

$6!$ — число одинаковых т.к. повтор. (перестановки)

и

$$N_1 = \frac{10!}{4!\,6!} - \frac{8!}{6!} + \frac{7!}{6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 7\cdot 8 + 7 =$$

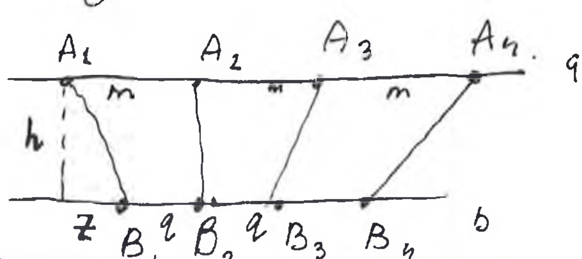
$= 210 - 49 = 161$ +

$\boxed{\text{Ответ: } 161}$

N2.

① Х. случай когда линии // ⇒

⇒



$A_1B_1 = 15\sqrt{2}$

$A_3B_3 = 5\sqrt{34}$

$A_4B_4 = 15\sqrt{10}$

∃ изначально. h - расстояние м/у линиями. а z - расстояние м/у проекциями A_1; B_1 на линию b.

и

Из. Th. Пифагора:

Р-ние: м/у A_1B_1 $\quad A_1B_1^2 = h^2 + z^2$

$A_3B_3 \quad A_3B_3^2 = h^2 + (2m - 2q - z)^2$

$A_4B_4 \quad A_4B_4^2 = h^2 + (3m - 3q - z)^2$

∃ $m - q = a$

и

можем составить систему:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} 450 = h^2 + z^2 \\ 850 = h^2 + (2a - z)^2 \\ 2250 = h^2 + (3a - z)^2 \end{cases}$$

Решим систему и проверим, возможен ли случай с 11 линией.

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 450 = h^2 + z^2 \\ 850 = h^2 + z^2 - 4a \cdot z + 4a^2 \\ 2250 = \underbrace{h^2 + z^2}_{= 450} - 6az + 9a^2 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 400 = 4a^2 - 4az \\ 1800 = 9a^2 - 6az \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 4a^2 - 4az = 400 \quad | \cdot 3 \\ 9a^2 - 6az = 1800 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12a^2 - 12az = 1200 \\ -18a^2 + 12az = -3600 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6a^2 = -2400 \\ 9a^2 - 6a \cdot z = 1800 \end{cases} \Leftrightarrow \cancel{\begin{cases} a = \pm 20 \\ z = \pm 15 \end{cases}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 20 \\ z = 15 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -20 \\ z = -15 \end{cases} \end{array}\right.$$

Т.к. $h = \sqrt{450 - z^2}$ нам не важно какой из 2-х случаев рассм, случаи одинаковые просто в одном $m > q$, а в другом $q > m$

$h = \sqrt{450 - 15^2} = 15$ (км)

$\boxed{\text{Ответ: 15 км}}$

+

№3

Дано: число $A \vdots 99$ последний разряд $= 3$
Переместим последнюю цифру в начало и число увеличивается на 27.

Можем составить уравнение
$\exists$ k - кол-во разрядов числа A $\quad \underline{k \geq 1}^{*}$

$$\underbrace{3\cdot 10^{k-1}} + \underbrace{\frac{A-3}{10}} = A + 27 \;\Big|\cdot 10$$

добавляем его перед первым разрядом ← убираем последний разряд

$$3\cdot 10^{k} + A - 3 = 10A + 270$$

$$9A + 91 = 10^{k} \Rightarrow \boxed{A = \frac{-91+10^{k}}{3}}$$

По условию известно, что $A \vdots 99$
Мы задали, что k - это кол-во разрядов числа A $\Rightarrow$ у числа $\frac{-91+10^k}{3}$ должно быть k разрядов; заметим, что данное условие выполняется при $k \geq 3$
т.к. при $k = 1$ число A получ $= -\frac{81}{3}$
при $k = 2$ $A = 3$. (1 разряд) (2 разряда)
При последующих k в числителе дроби мы получаем число $\underbrace{9\ldots9}_{k-2}09$ заметим, что при делении на 3. числитель не теряет разряды. $\Rightarrow$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\Rightarrow A = \underbrace{33\ldots3}_{k-2}03.$

По условию того, что $A \vdots 99 \Rightarrow \begin{cases} A \vdots 11 \\ A \vdots 9. \end{cases}$

Признак делимости числа на 11: сумма цифр на четных позициях = = сумме цифр на нечетных.

① $\measuredangle$. $\underbrace{33\ldots3}_{\text{четное число}}03 \Rightarrow \underbrace{33\ldots3}_{\text{четн}}00 \equiv_{11} 0$

$33\ldots300+3 \equiv_{11} 3$

$\Downarrow$

$\underbrace{333\ldots3}_{\text{четн}}03 \not\vdots 11 \quad \not\vdots 99$

② $\measuredangle$. когда нечетное число 3

$\Downarrow$

$\underbrace{333\ldots33}_{\text{нечетн}}00 + 3 \Rightarrow \underbrace{3333 \quad 3}_{\text{нечет}}00 \equiv_{11} 3$ (одно и тоже, что $300 \equiv_{11} 3$).

$\Downarrow$

$\underbrace{333\ldots3}_{\text{нечетн.}}00 + 3 \equiv_{11} 3+3 < 11$

$\Downarrow$

$\underbrace{333\ldots3}_{\text{нечетное.}}00+3 \not\vdots 11 \quad \not\vdots 99.$

$\Downarrow$

искомого числа A не существует.

Ответ: не существует

№5.

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

т.к. коэф. обр. геометрич. прогрессию

$\Downarrow$

можем вынести a_0'. (1. член) $a_0' = a_n$

$\Downarrow$

$P_n(x) = a_0'(x^n + q x^{n-1} \ldots + q^n) = 0$

$\Downarrow$

т.к. $q \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. можем разделить на. x^n.

$\Downarrow$

получим.

$\frac{q^n}{x^n} + \frac{q^{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{q}{x} + 1 = 0.$

$\Downarrow$

(1) $\left(\frac{q}{x}\right)^n + \left(\frac{q}{x}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{q}{x} + 1 = 0.$

$\Downarrow$

если. n нечетное, то всегда будет. корень. $x = -q$ т.к. сумма. будет $= 0$. (нечетное число пар. $+1$ и -1)

Если. мы разделим выражение. (1) на. корень. (на $\frac{q}{x} + 1$) (т.к. $\frac{q}{x} + 1 = 0$) $x = -q$. из. к ра...

$\Downarrow$

$\left(\frac{q}{x}\right)^n + \left(\frac{q}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{q}{x}\right)^{n-2} + \left(\frac{q}{x}\right)^{n-3} \ldots 1 \quad \Big| \ \frac{q}{x} + 1.$

$-\left(\frac{q}{x}\right)^n + \left(\frac{q}{x}\right)^{n-1} \qquad \left(\frac{q}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{q}{x}\right)^{n-3} \ldots =$

$\left(\frac{q}{x}\right)^{n-2} \left(\frac{q}{x}\right)^{n-3}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

и,
получим,
что

$$\left(\frac{q}{x}+1\right)\underbrace{\left(\left(\frac{q}{x}\right)^{n-1}+\left(\frac{q}{x}\right)^{n-3}+\ldots+1\right)}_{}$$

т.к. n нечетн. ⇒
⇒ все четные ⇒ ∅

n - наименьшее нечетное
n = 2025

$$\boxed{\text{Ответ: } 2025,\ x=-q}$$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ	IL98-25
Место проведения	шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ КАМАЛЕТДИНОВ

ИМЯ АЛМАС

ОТЧЕСТВО ГАЛИЯНОВИЧ

Дата рождения 13.03.2006

Класс: 11

Предмет МАТЕМАТИКА

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах**

Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ IL98-25

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

N-3

$A = \overline{x3}$, где x k-значное число

~~$\frac{27A}{3x}$~~

~~$\overline{x3} = 10x + 3$~~

~~$\overline{3x} = 3 \cdot 10^k + x$~~

~~$27(10x+3) = 3 \cdot 10^k + x$~~

~~$270x + 81 = 3 \cdot 10^k + x$~~

~~$\Rightarrow x \vdots 3 \quad x = 3t$~~

~~$270 \cdot 3t + 81 = 3 \cdot 10^k + 3t \;|:3$~~

~~$270t + 27 = 10^k + t$~~

$A + 27 = \overline{3x}$

$\overline{x3} = 10x + 3 \qquad \overline{3x} = 3 \cdot 10^k + x$

$10x + 30 = 3 \cdot 10^k + x$

$9x + 30 = 3 \cdot 10^k \;|:3$

$3x + 10 = 10^k$

$3x = 10(\underbrace{99\ldots9}_{k-1\text{ штука}}) \;|:3$

$x = 10 \cdot (\underbrace{333\ldots3}_{k-1\text{ штука}})$

$x = \underbrace{333\ldots3}_{k-1\text{ штука}}0$

+

$A = \underbrace{333\ldots3}_{k-1\text{ штука}}03$

$A \vdots 99 \Rightarrow A \vdots 9$ и $A \vdots 11$

Для делимости на 9 сумма цифр должна $\vdots 9$:

$3 \cdot k \vdots 9$

Для делимости на 11 знакоперем. сумма должна $\vdots 11$:

~~знакоперем~~

если $k-1$ чет:

$3 - 3 + 3 - 3 \ldots - 3 + 0 - 3$

$= -3 \not\vdots 11$

если $k-1$ нечет:

$3 - 3 + 3 \ldots + 3 - 0 + 3 = 6 \not\vdots 11$

$\Rightarrow$ при любом k $A \not\vdots 11$ - противоречие

Ответ: такого числа не сущ.

N-5 $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

геом. прогр.

$a_n = b\cdot q^{n-1}$, $b \neq 0$

$P_n(x) = bq^{n-1}\cdot x^n + bq^{n-2}x^{n-1} + \dots + xb + \frac{b}{q}$

$bq^{n-1}\cdot x^n + \dots + \frac{b}{q} = 0 \quad |\cdot q \neq 0$

$bq^n\cdot x^n + \dots + b = 0 \quad |:b \neq 0$

$x^n\cdot q^n + \dots + 1 = 0$

пусть $x\cdot q = y$

$y^n + y^{n-1} + \dots + y + 1 = 0$

очевидно, что положительных корней нет, т.к при подстановке $y \geq 0$, каждый $y^i \geq 0$ и свободный коэф $= 1$

домножим и поделим выражение $y-1 \neq 0$:

$$\frac{y^{n+1}-1}{y-1} = 0 \Rightarrow y^{n+1} - 1 = 0$$

$y^{n+1} = 1$; когда $n+1$ нечет корней нет, т.к $y^{n+1} = 1$ только при $y = 1$, но исх. уравнение не имеет полож. корней.

когда $n+1$ чет, есть один корень -1, т.к $n > 2024 \Rightarrow$

$n \geq 2025 \Rightarrow \boxed{n+1 \geq 2026}$

$n_{min} = 2025$

$x^{2026}\cdot q^{2026} = 1 \quad x\cdot q = -1 \quad x = -\frac{1}{q}$

Ответ: $n_{min} = 2025$ $x = -\frac{1}{q}$

~~N-1 (продолжение)~~
~~Дальше вычитаем из всех способов кол-во не подходящих~~
~~210 - 203 = 7~~
~~Ответ: 7~~

N-1

расположим 6 „обзорных" дней:

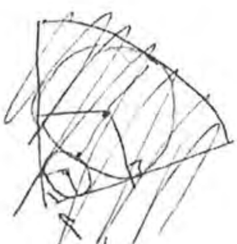
$_1\bigcirc_2\bigcirc_3\bigcirc_4\bigcirc_5\bigcirc_6\bigcirc_7$

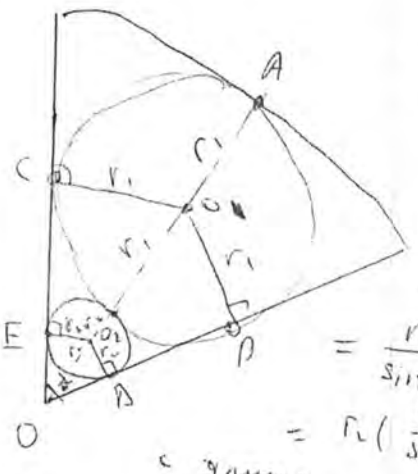
чтобы „голодные дни" не шли подряд, мы должны ставить их как „перегородки" между „обзорными" днями или до либо после всех „обзорных" дней. Всего 7 мест, мы должны выбрать 4 места, куда поставить „голодные" дни

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{6} = 35$$

Ответ: 35

N-4





r_1 - радиус большой окр
r_2 - радиус мал окр
AO - радиус шкива

$$AO = OO_2 + O_2O_1 + O_1A = \frac{r_2}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r_2 + r_1 + r_2 + r_1 = r_2\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1\right) + 2r_1$$

с другой стороны $AO = OO_1 + O_1A = \frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r_1$ ~~$2r_1$~~ $=$

$$\Rightarrow r_2\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1\right) = \frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - r_1 = r_1\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow r_2 = r_1 \frac{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\right)}{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1\right)}$$

N-4 (продолжение)

$$R = AO = \frac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r_1$$

$r_1 + r_2$ - расстояние между центрами, т.к. окружности касаются

$$\frac{r_1+r_2}{R} = \frac{r_1 + r_1\dfrac{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right)}{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right)}}{\dfrac{r_1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+r_1} \setminus r_1 = \frac{1+\dfrac{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1\right)}{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right)}}{\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1} \setminus \left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}-1}{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right)^2} = \frac{\frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{2}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1} \setminus \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{1+2\sin\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

т.к. $0<\alpha\le\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

пусть $t = \sin\frac{\alpha}{2}$

$$f(t) = \frac{2t}{(t+1)^2}; \quad f'(t) = \frac{2(t+1)^2 - 2(t+1)\cdot 2t}{(t+1)^2}$$

$$= \frac{2t^2+4t+2-4t^2-4t}{(t+1)^2} = \frac{2-2t^2}{(t+1)^2}$$

найдем нули производной:

$\Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$;

$-$ $\quad -1 \quad$ $+$ $\quad 1 \quad$ $-$ $\quad t$

min $\quad$ max

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ IL98-25

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

п. 4 (продолжение)

т.к. $t \in (0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ и $f(t)$ на промежутке $(0; \frac{1}{\sqrt{2}})$ возрастает, $f_{max} = f(\frac{1}{\sqrt{2}})$

значит $\max\left(\frac{r_1 + r_2}{R}\right) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)^2}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 45°$

$\alpha = 90°$

максимум достигается при $\alpha = 90°$

Ответ: $\frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{1}{\sqrt{2}}+1)^2}$; $\alpha = 90°$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ИГЭУ

Место проведения

SE22-83

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17511

ФАМИЛИЯ Капустин

ИМЯ Кирилл

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 12.06.2014

Класс: 5

Предмет Математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 3 **листах**

Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Кап

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

В этой задаче стоит действовать от противного. Допустим призы распределили так: у одного - 0; у другого - 1; у третьего - 2 и т.д. у седьмого - 6. Тогда останется 8 призов. Их так же надо раздавать каждому по одному призу, и последний оставшийся приз уйдет какому-то гному и у него станет столько-же сколько у какого-то другого (Например: у двух гномов было 7 и 8 призов. Если приз уйдет гному, у которого 7, то у него как и у другого их станет 8) только частн. случай

№2

Чтобы кучку нельзя было разделить на 2 части надо, чтобы в ней было только одно зерно, значит нужно посчитать сколько разделений надо сделать, чтобы в каждой кучке было по одному зерну. Разделений всегда на 1 меньше чем объектов, значит, чтобы разделить кучку из 5 зерен надо 4 деления, из 7 - 6 делений, из 10 - 9 делений, из 14 - 13 делений, а из 16 - 15 делений. Всего получается $4+6+9+13+15=47$ делений. 47 - это нечетное число, а все нечетные деления совершает первый игрок. Первым ходит Петя значит он и выиграет.

Ответ: выиграет Петя

№3

В каждой паре будет 4 одинаковые части (3 у гнома и 1 у феи или на оборот) соответственно каждая пара собрала чётное число бабочек, сколько-бы не было пар общее число бабочек оставалось-бы чётным, а 2025 - это нечётное число, соответственно это не могло получиться.

Ответ: не могло.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17591

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SE22-83

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Если Кашинтак не рисует, то Крокозавец поёт и тогда Мармагуец не дрессирует животных, а Кашинтак танцует, значит Чупафрях не танцует, а Землянин поёт, но поёт уже Крокозавец - это противоречие! А если Кашинтак рисует, то Крокозавец не поёт, а Мармагуец дрессирует животных, тогда Кашинтак не танцует, а Чупафрях свободно может танцевать, но тогда он должен будет и писать стихи. Это противоречие! Значит Чупафрях не танцует, Землянин поёт, а Чупафрях пишет стихи. Здесь нет противоречий, значит Кашинтак рисует, Мармагуец дрессирует животных, Чупафрях пишет стихи, Землянин поёт, а Крокозавец делает оставшееся, то есть танцует

Ответ: Кашинтак рисует, Чупафрях пишет стихи, Землянин поёт, Крокозавец танцует, а Мармагуец дрессирует животных

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17551 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ SE22-83

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5.

Стоит заметить, что в словах сом и мост одинаковые буквы - с, о, м, а в слове мост есть ещё только 1 буква - т. Значит она равна разности суммы цифр в этих словах, то есть 26-21=5. 5 - это буква т. Теперь найдём букву л. Она - единственное различие между словами сто и стол, значит она тоже равна их разности, то есть 23-17=6. 6 - это буква л. Также можно найти значение слога со. Из слова сто надо вычесть букву т, то есть 17-5=12. 12 - это слог со. Теперь найдём все возможные значения с. Вес - это сумма 3 слагаемых. Они могут быть равны 0,1,4 или 0,2,3. Цифрами 0,1,2 с не может быть, потому что о тогда будет равно числу, а не цифре, значит с - это 4 или 3, а о - это 12-4 или 12-3, то есть 8 или 9. Теперь найдём букву м. Она равна разности слова сом и слога со, то есть 21-12=9. 9 - это буква м. Буква о тоже может быть цифрой 9, но у неё, в отличии от буквы м, есть 2 варианта, а если о не 9, то она 8. 8 - это о.

В итоге ~~слово~~ молот - это 98685

Ответ: 98685.

+

Лист 3 из 3

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Гимназия №6
г. Новочебоксарск

Место проведения

VH 74-37

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Климченко

ИМЯ Валентина

ОТЧЕСТВО Ильинична

Дата рождения 01.10.2007

Класс: 10

Предмет математика

Этап: заключительный

Работа выполнена на 7 **листах**

Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Клим

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

Пусть B – т число, которое получается из числа A путём вычёркивания последней цифры. Пусть в числе A n цифр, тогда:

$A = \overline{B2} = 10B + 2$

Число, которое получится, если переставить последнюю цифру в начало:

$\overline{2B} = 2 \cdot 10^{n-1} + B$

$2 \cdot 10^{n-1} + B = 10B + 2 + 18$

$9B = 2 \cdot 10^{n-1} - 20 = 20(10^{n-2} - 1) = 20 \cdot \underbrace{99...9}_{n-2 \text{ шт}}$

$B = 20 \cdot \underbrace{1111...1}_{n-2 \text{ шт}} = \underbrace{222...2}_{n-2 \text{ шт}}0$

Т.е. число A имеет вид $\underbrace{222...2}_{n-2 \text{ шт}}02$ (как раз n цифр)

Если n=2023, то сумма цифр A: $2 \cdot (2023-2) + 2 = 2022 \cdot 2 \vdots 3 \Rightarrow A \vdots 3$, A заканчивается на 2 $\Rightarrow A \vdots 2 \Rightarrow A \vdots 6 \Rightarrow$ 2023 цифры может быть. Это число: $\underbrace{222......2}_{2021 \text{ шт}}02$. Оно $\vdots 6$ и если мы переставим последнюю цифру в начало, то получим число

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\underbrace{222\ldots}_{2022\text{шт.}}20$, которое на 18 больше А.

Если $n=2024$, то сумма цифр А: $2(2024-2)+2=$
$=2\cdot 2023$ не $\vdots 3$ => А не $\vdots 3$ => А не $\vdots 6$ => 2024 цифры быть не может

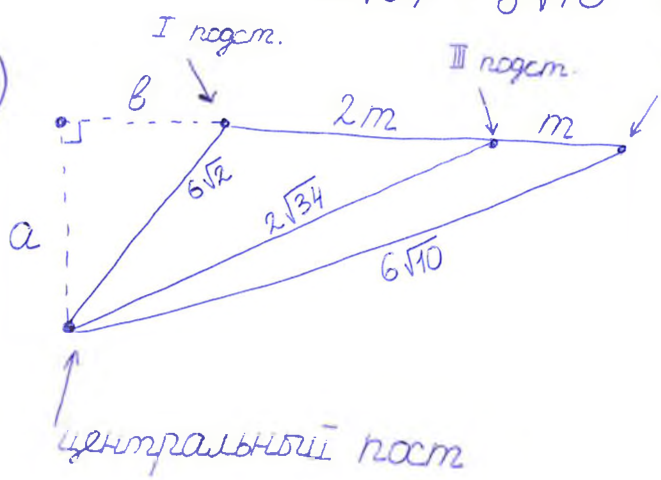
+

Ответ: 2023 может, а 2024 - нет.

№3

$72<136 \Rightarrow 6\sqrt{2}<2\sqrt{34}$
$136<360 \Rightarrow 2\sqrt{34}<6\sqrt{10}$ } => возможны 2 ситуации:

1)



(расстояние между I и II подст. - m, между II и III - m, они на-ся на одной прямой => между I и III - 2m)

Пусть расстояние от центрального поста до линии электропередач - a км, а расстояние от I подстанции до точки ближайш. к центральному посту $в$ км (кратчайшее расст. между точкой и прямой - перпендикуляр из точки на прямую)

По теореме Пифагора:

$$\begin{cases} a^2+в^2=(6\sqrt{2})^2 \\ a^2+(в+2m)^2=(2\sqrt{34})^2 \\ a^2+(в+3m)^2=(6\sqrt{10})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+в^2=72 \quad (1) \\ a^2+в^2+4m^2+4вm=136 \quad (2) \\ a^2+в^2+9m^2+6вm=360 \quad (3) \end{cases}$$

$a^2+b^2=72$

~~4π~~ $(2)-(1)$: $4m^2+4bm=64 \Rightarrow m^2+bm=16 \Rightarrow 6m^2+6bm=96$ (4)

$(3)-(1)$: $9m^2+6bm=288$ (5)

$(5)-(4)$: $3m^2=288-96 \Rightarrow 3m^2=192 \Rightarrow m^2=64$

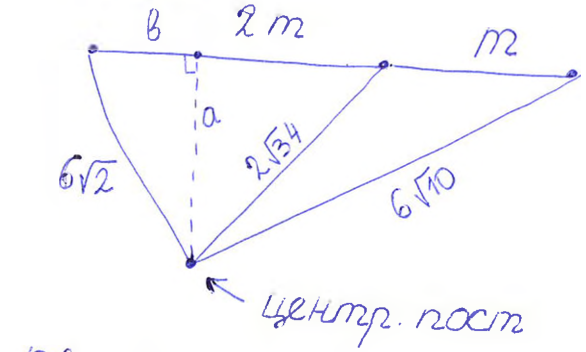
$m>0 \Rightarrow m=8$

~~$m>0$~~ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} bm=16-64=-48 \\ m=8 \end{array}\right\} \Rightarrow b=-6$

$a^2+b^2=(6\sqrt{2})^2 \Rightarrow a^2+b^2=72 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=36 \\ a>0 \end{array}\right\} a=6.$

$b<0 \Rightarrow$ такого не может быть.

2 случай:



Введём обозначения а-ное 1 случаю (см. картинку)

По теор. Пифагора:

$$\begin{cases} a^2+b^2=(6\sqrt{2})^2 \\ a^2+(2m-b)^2=(2\sqrt{34})^2 \\ a^2+(3m-b)^2=(6\sqrt{10})^2 \end{cases}$$

$c=-b$, тогда $c<0$ и

$$\begin{cases} a^2+c^2=72 \\ a^2+(2m+c)^2=136 \\ a^2+(3m+c)^2=360 \end{cases}$$

Это, та же система, что и в предыдущем случае $\Rightarrow$ $\Rightarrow m^2=64$, а $mc=-48 \Rightarrow m=8$

$c = \frac{-48}{8} = -6 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow a^2 + 6^2 = 72 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$

Ответ: точка на линии ближайшая к центр. посту находится на расстоянии 6 км, $m = 8$ км, расстояние от поста до линии 6 км.

+

№4

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, a_0$ образуют геометрическую прогрессию с отрицательным q, т.е. у a_k и a_{k+1} разные знаки.

А) ~~1)~~ Пусть существуют отрицательные корни, один из них x_1:

A_n 1) Пусть $a_n > 0$, тогда:

$a_k x_1^k$, если k-чётное, то $a_k < 0$ (n-нечётное и $a_n > 0$), а $x_1^k > 0 \Rightarrow a_k x_1^k < 0$.

если k нечётное, то $a_k > 0$, а $x_1^k < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_k x_1^k < 0 \Rightarrow$ Все слагаемые $< 0 \Rightarrow$ и сумма $< 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow P_n(x_1) < 0$, но x_1-корень $\Rightarrow P_n(x_1) = 0$. Противоречие.

2) Пусть $a_n < 0$, тогда:

$a_k x_1^k$, если k-чётное, то $a_k > 0$, а $x_1^k > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^k x_1^k > 0$.

если k-нечётное, то $a_k < 0$ и $x_1^k < 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^k x_1^k > 0 \Rightarrow$ Все слагаемые $> 0 \Rightarrow P_n(x_1) > 0$, но x_1-корень $\Rightarrow P_n(x_1) = 0$. Противоречие $\Rightarrow$ предположение не-

верно => не существует отрицательных корней.

В) $P_n(x) = a_n x^n + a_n q x^{n-1} + a_n q^2 x^{n-2} + \ldots + a_n q^{n-1} x +$

$+ a_n q^n = a_n (x^n + q x^{n-1} + q^2 x^{n-2} + \ldots + q^n) =$

$= a_n \frac{x^{n+1} - q^{n+1}}{x - q} = 0$ ($x \neq q$, т.к. $q < 0$, а $x \geq 0$, если x - корень)

$\left.\begin{array}{l} a_n \neq 0 \\ x - q \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^{n+1} - q^{n+1} = 0 \Rightarrow x^{n+1} = q^{n+1}$

Это возможно, только если $x = q$ или $x = -q$, $x \neq q \Rightarrow$ корень может быть только 1 и это $x = -q$ (корней не более 1)

Покажем, что $x = -q$ является корнем многочлена:

$P_n(x) = a_n \cancel{\frac{x^{n+1}}{\quad}}\ a_n (x^n + q x^{n-1} + \ldots + q^n) =$

$= a^n (-q^n + q \cdot q^{n-1} - q^{n-2} q^2 + q^{n-3} q^3 + \ldots - q^{n-1} q + q^n) =$

$= a^n (\underbrace{-q^n + q^n}_{0} \underbrace{- q^n + q^n}_{0} \ldots \underbrace{- q^n + q^n}_{0}) = a^n \cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -q$ является корнем многочлена.

Ответ: 1; $x = -q$.

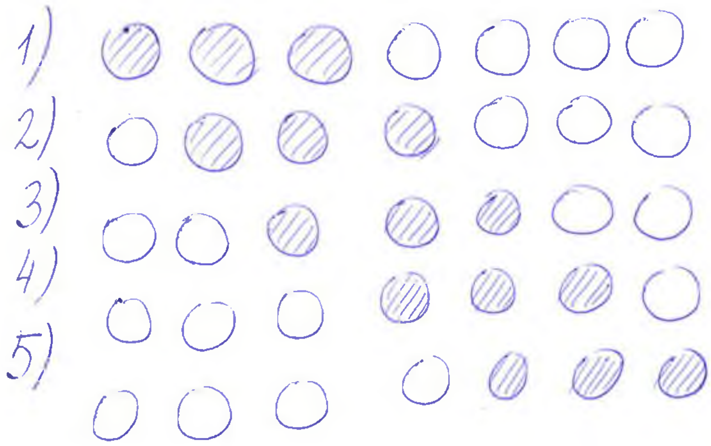
№5

Посчитаем сколько всего у людоеда способов выбрать 4 дня из 7 для поедания скрошниц.

$C_7^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ (способ.)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Посчитаем количество способов, в которые не удовлетворяют условию, т.е. такие, в которых есть перерыв между скрашицами хотя бы 3 дня, но у нас всего дней, когда он не ест скрашиц $7-4=3$ => => есть только 5 случаев:



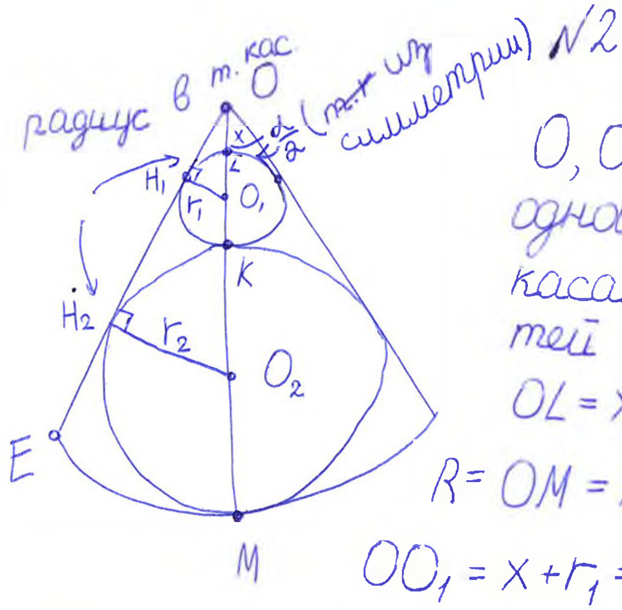
◍ - день, когда людоед не ест скраин.
○ - день, когда людоед ест скраин.

+

=> всего ~~сно~~ вариантов удовлетворяющих условию $35-5=30$ (вариантов)

Ответ: 30 вариантов.

№2



O, O_1, K, O_2 и M лежат на одной прямой (т.к. точка касания и центры окружностей лежат на 1 прямой)
$OL = x$.

$R = OM = x + 2r_1 + 2r_2 \Rightarrow x = R - 2r_1 - 2r_2$.

$OO_1 = x + r_1 = R - 2r_1 - 2r_2 + r_1 = R - r_1 - 2r_2$.

$OO_2 = x + 2r_1 + r_2 = R - r_2$.

~~Теорема Пифагора: $OH_1 = \sqrt{\ }$~~

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Рассмотрим $\triangle OH_1O_1$ и $\triangle OH_2O_2$:

$\left.\begin{array}{l}\angle EOM \text{ - общий} \\ \angle OH_1O_1 = \angle OH_2O_2 = 90^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle OH_1O_1 \sim \triangle OH_2O_2$ (по 2 углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{OO_1}{OO_2} = \dfrac{O_1H_1}{O_2H_2} \Rightarrow \dfrac{R-r_1-2r_2}{R-r_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$.

$Rr_2 - r_1r_2 - 2r_2^2 = Rr_1 - r_1r_2$.

$Rr_2 - 2r_2^2 = Rr_1 \Rightarrow 2r_2^2 = R(r_2 - r_1)$.

$\dfrac{r_1}{R} = \dfrac{r_2}{R} - 2\dfrac{r_2^2}{R^2}$. $\dfrac{r_2}{R} = x$, тогда:

$\dfrac{r_1}{R} = x - 2x^2$ - парабола ветвями вниз $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_{max} = \dfrac{-1}{2\cdot(-2)} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{r_1}{R} = \dfrac{1}{4} - 2\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$.

$r_1 = \dfrac{R}{8}$

$\dfrac{r_2}{R} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow r_2 = \dfrac{R}{4} \Rightarrow OO_{\cancel{1}2} = R - \dfrac{R}{4} = \dfrac{3}{4}R$

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\frac{1}{4}R}{\frac{3}{4}R} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = \arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow$ (т.к. $\alpha < 180^\circ$, иначе не будут касаться 2 сторон)

$\Rightarrow \alpha = 2\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right)$

Ответ: $\dfrac{r_1}{R} = \dfrac{1}{8}$; $\alpha = 2\arcsin\dfrac{1}{3}$.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

M10F02	Дистанционно, с использованием ВКС
№ группы	Место проведения

OJ85-58

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Козлов

ИМЯ Тимофей

ОТЧЕСТВО Алексеевич

Дата рождения 05.01.2007

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 5 листах

Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

OJ85-58

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OJ85-58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

$A \vdots 6$

$A = \overline{B2}$

$A' = \overline{2B}$

$\overline{2B} = \overline{B2} + 18$

B - оканчивается на 0 так как

$2+8=10$

$B = \ldots 0$

$2\ldots0 = \ldots 02 + 18$

=> последняя цифра 2

$2\ldots20 = \ldots 202 + 18$

Далее находим цифры из сложения

$2\ldots220 = \ldots 2202 + 18$

Видим что все остальные цифры это 2

$A = 22\ldots2202$

Пусть A n-значное, тогда

сумма цифр $2\cdot(n-1)$

$A \vdots 6 \Rightarrow 2\cdot(n-1) \vdots 6 \Rightarrow n-1 \vdots 3$

1) 2023-значным

$2023-1 = 2022 \vdots 3$

Ответ: да

$A = \underbrace{22\ldots22}_{2021}02$

2) 2024-значным

$2024-1 = 2023 \not\vdots 3$

Ответ нет

+

Лист 1 из 5

OJ85-58

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OJ85-58

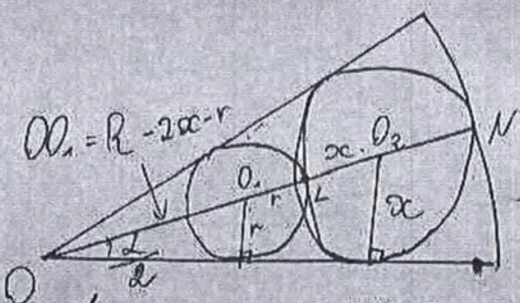
ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

Дано: $R, \alpha, \omega_1, \omega_2$

Найти: $\left(\frac{r}{R}\right)_{max}$ - ?

α - ?



Легко понять, что N, O_2, O лежат на одной прямой (известный факт)

$O; O_1; O_2$ - лежат на одной прямой

$O_1; L; O_2$ - лежат на одной прямой

$\Rightarrow O; O_1; L; O_2; N$ лежат на одной прямой

x - радиус ω_2

r - радиус ω_1

тогда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R-2x-r} = \frac{x}{R-x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[x = R \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right]$

$R - 2x - r = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow 1 - 2\frac{x}{R} = \frac{r}{R}\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= 1 - 2 \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{R}\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) \Rightarrow$

$\left[\frac{r}{R} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} - 2\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right]$

$\left[\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = t\right] \Rightarrow \frac{r}{R} = t - 2t^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$ достигается максимум

$\Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)_{max} = \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$

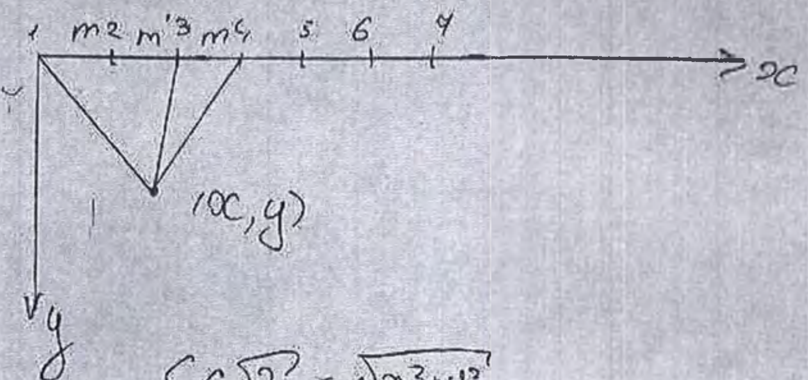
При $4\sin\frac{\alpha}{2} = 1 + \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \left[\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}\right]$

OJ85-58

$\alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

Ответ: $\left(\frac{r}{R}\right)_{max} = \frac{1}{8}$ при $\alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$

№3



$$\begin{cases} 6\sqrt{2} = \sqrt{x^2+y^2} \\ 2\sqrt{34} = \sqrt{(x-2m)^2+y^2} \\ 6\sqrt{10} = \sqrt{(x-3m)^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 72 \\ (x-2m)^2+y^2 = 136 \\ (x-3m)^2+y^2 = 360 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-2m)^2 - x^2 = 64 \\ (x-3m)^2 - x^2 = 288 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2m(2x-2m) = 64 \\ -3m(2x-3m) = 288 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(m-x) = 16 \\ m(3m-2x) = 96 \end{cases}$$

$3m - 2x = 6(m-x)$

$4x = 3m$

$m\left(m - \frac{3}{4}m\right) = 16$

$\frac{1}{4}m^2 = 16$

~~m = 8 км~~

$m = 8$ км
$x = 6$ км
$y = 6$ км

Ответ: $l = 6$ км, $d = 6$ км, $m = 8$ км

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OJ85-58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$n \vdots 2$

$a_{n-1} = a_n \cdot q$

$a_k = a_n \cdot q^{n-k}$

$\frac{1}{q} = p$

$a_n = a_0 \cdot p^n$

$P_n(x) = a_0 (p^n x^n + p^{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + px + 1)$

$q < 0 \Rightarrow p < 0$

А) Если $x < 0$, то $p \cdot x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_n(x) > 0 \Rightarrow$ корни только положительные

Б) $P_n(x) = a_0 \frac{1 - (px)^{n+1}}{1 - px}$

$P_n(x) = a_0 \cdot \frac{1 - (\frac{x}{q})^{n+1}}{1 - (\frac{x}{q})}$

$P_n(x) = 0 \Rightarrow 1 - (\frac{x}{q})^{n+1} = 0, \ 1 - \frac{x}{q} \neq 0$

$\begin{cases} \left|\frac{x}{q}\right| = 1 \\ \frac{x}{q} \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{q} = 1$

$x = -q$

Ответ: корень один $x = -q$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OJ85-58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

4 - дни для лоkoлютва

7 - дни в недеnе

Не более двух дней между

Рассмотрим случай, когда более 2 дней между

Таких 5 вариантов Почему?

Всего вариантов выбрать 4 дня недели $C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$

$35 - 5 = 30$

Ответ: 30 вариантов

±

OJ85-58

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ

Место проведения

МА67-66

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Комов

ИМЯ Тимофей

ОТЧЕСТВО Александрович

Дата рождения 31.01.2007г.

Класс: 11

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 7 **листах**

Дата выполнения работы: 10.03.2024г.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Комов

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

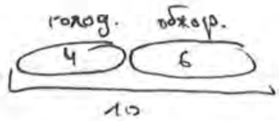
Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ МА67-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1

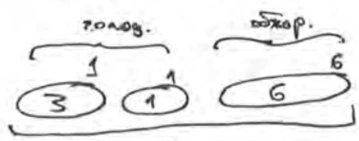
Заметим, что всего способов распределить 4 голодных дня среди 10 дней: $K_0 = C_{10}^4 = \frac{10!}{6!\cdot 4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{8\cdot 3} = 210$



⇒ Но надо вычесть те случаи, когда 3 голодных дня или 4 голод. дня подряд (больше 2х)

⇒ Чтобы учесть эти варианты сделаем следующее: Пусть блок из 3х подряд идущих дней будем считать как бы одним целым

⇒



10 дней – 8 отдел. единиц.

⇒ в данном случае кол-во способов распределить 2 группы голод. дней среди 8 ячеек:

$K_1 = 2\cdot C_8^2 = \frac{8!}{6!\cdot 2}\cdot 2 = 56$

умножаем на 2, т.к. нам важен порядок — группа из 3 дней или из 1 дня

Но надо вычесть из K_1 те случаи, когда все 4 дня вместе, в K_1 мы учли их дважды

$K_2 = C_7^1 = 7$

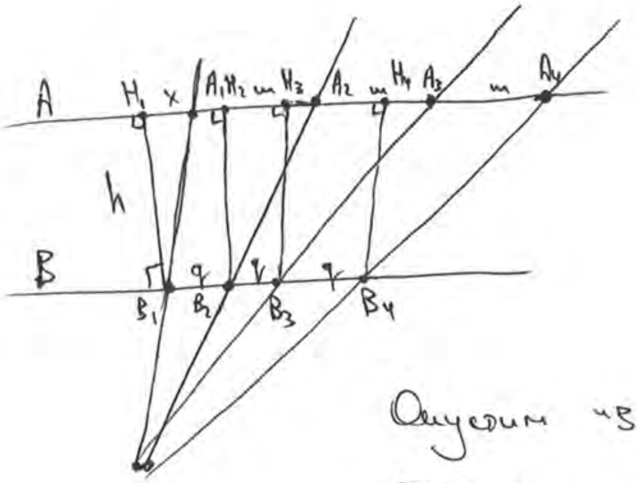
⇒ Всего искомых вариантов $= K_0 - (K_1 - K_2) = 210 - 49 = 7(30-7) =$

$= 161$.

+

Ответ: 161.

$\boxed{2}$ Предположим, что линии передач A и B паралл., если получим противоречие, то A и B – пересекаются.



(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 – пересекаются в одной точке (вытекает из подобных Δ-ов))

Не показано

Опустим из т. B_1 перпендикуляр на пр. A

$\Rightarrow B_1H_1 \perp_{пр.} A$

Пусть $B_1H_1 = h$, $HA_1 = x$, где $h > 0$, $x > 0$, если т. A_1 справа от т. H

$x = 0$, если т. A_1 = т. H

$x < 0$, если т. A_1 слева от т. H

Опустим перпенд. на пр. A из т. B_2, B_3, B_4 $\Rightarrow$ $B_2H_2 \perp$ пр. A, $B_3H_3 \perp$ пр. A, $B_4H_4 \perp$ пр. A

$\Rightarrow$ т.к. пр. A $\parallel$ пр. B, B_1H_1 и $B_2H_2 \parallel B_3H_3 \parallel B_4H_4$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ это все пар-мы (пр/уг)

$\Rightarrow H_1H_2 = H_2H_3 = H_3H_4 = q = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$

$\Rightarrow H_3A_3 = m + H_2A_2 = m + m - A_1H_3 = m + m - [q + A_1H_2] = 2m - [q + (q - x)] =$

$= 2m - 2q + x$

$H_4A_4 = H_3A_3 - H_3H_4 + A_3A_4 = 3m - 3q + x$

2) (Продолж.)

$\Rightarrow$ По т. Пифагора для $\triangle B_1H_1A_1$; $\triangle B_3H_3A_3$ (пр/ℓ_2); $\triangle B_4H_4A_4$:

$$\begin{cases} h^2 + x^2 = A_1B_1^2 \quad (1) \\ h^2 + (x+2w-2q)^2 = A_3B_3^2 \quad (2) \\ h^2 + (x+3w-3q)^2 = A_4B_4^2 \quad (3) \end{cases}$$

Пусть $w-q=p$

$\Rightarrow$ (2)-(1): $A_3B_3^2 - A_1B_1^2 = 2p\cdot 2(p+x) = 850-450=400$

(3)-(2): $A_4B_4^2 - A_3B_3^2 = p\,(5p+2x) = 2250-850=1400$

$$\frac{(5p+2x)}{4(p+x)} = \frac{14}{4}, \quad p \neq 0 \quad \text{иначе} - \cancel{...}$$

$5p+2x = 14p+14x$

$9p = -12x$

$$\boxed{x = -\frac{3}{4}p} \Rightarrow 4p\cdot\left(p - \frac{3}{4}p\right) = \cancel{400}\ 100$$

$\frac{1}{4}p^2 = 100$

$p^2 = 400$

$p = \pm 20 \Rightarrow \underline{x = \mp 15}$

$\Rightarrow h^2 = A_1B_1^2 - x^2 = 450-225 = 225$

$\Rightarrow h = 15 > 0$, т.к. h - просто расст.

$\Rightarrow$ т.к. этот случай с непарал. пр. возможен (корни существуют)

$\Rightarrow$ это так $\Rightarrow$ пр. A $\nparallel$ пр. B и $h=15$

Ответ: 15.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$\boxed{3}$

Пусть $A = \overline{x3}$, где x - некоторое число

$\Rightarrow$ Если мы переставим 3 в начало (послед. цифру), то получим $B = \overline{3x}$

Известно, что $B = A + 27$

$$3 \cdot 10^y + x = x \cdot 10 + 3 + 27$$, где y – кол-во цифр в числе x

$$\Rightarrow 9x = 3 \cdot 10^y - 30$$

+

$$x = \frac{10 \cdot (10^{y-1} - 1)}{3} = \underbrace{\overline{9\ldots9}}_{y-1} \cdot \frac{10}{3} = \underbrace{\overline{33\ldots30}}_{y-1}$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\overline{33\ldots3}}_{n \text{ троек}}03, \; n \geq 1$$

Т.к. $A \vdots 99 \Rightarrow A \vdots 11$ и $A \vdots 9$

$\Rightarrow (n+1) \vdots 3$ (чтобы $A \vdots 9$)

$\Rightarrow$ Признак делимости на 11:

$\underbrace{\text{„Сумма цифр на чёт."} - \text{„сумма цифр на нечёт"}}_{k} \vdots 11$

• Если n чётно, то $\boxed{k=3}$

пример: 333303

$9-6=3$

• Если n нечётно, то $\boxed{k=6}$

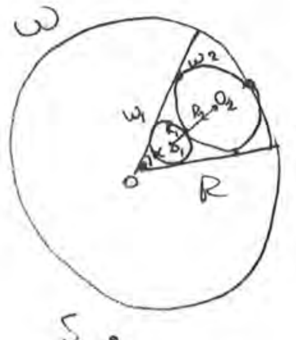
пример: 33303

$9-3=6$

$\Rightarrow$ Ни 3, ни 6 $\not\vdots\, 11 \Rightarrow A \not\vdots\, 11 \Rightarrow \nexists A$.

$\Rightarrow$ Ответ: такого числа не существует.

4



Пусть R_1 - радиус ω_1

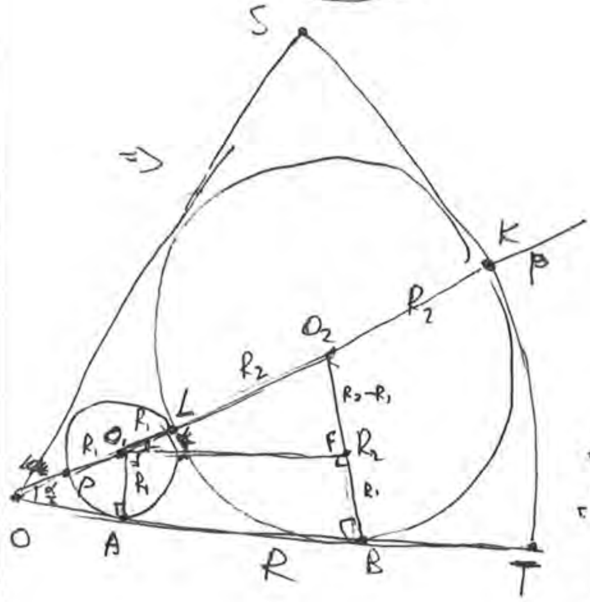
R_2 - радиус ω_2, как на рис.

O_1 - центр. ω_1

O_2 - центр ω_2

O - центр ω

R - радиус ω



O, O_1, O_2, L, P, K - лежат на одной прямой p

L - т. касания ω_1 и ω_2

т. L и т. $P = p \cap \omega_1$

т. L и т. $K = p \cap \omega_2$

OT, OS - радиусы - стороны сектора

⇒ Заметим, что p - бисс. $\angle SOT$

$\Rightarrow \angle POT = \frac{\alpha}{2}$

Обозначим т. как на рисунке

$\Rightarrow \triangle OO_1A \sim \triangle OO_2B$ (пр/у2 и $\angle KOT$ - общ.)

$$\Rightarrow \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{O_1A}{O_2B} = \frac{OP+R_1}{OP+2R_1+R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

$$OP(R_2-R_1) = 2R_1^2 + \cancel{R_1R_2} - \cancel{R_1R_2}$$

$$OP = \frac{2R_1^2}{R_2-R_1} \quad OO_1 = OP+R_1 = \frac{R_1(R_2+R_1)}{R_2-R_1} = \frac{R_1\cdot b}{R_2-R_1}$$

Пусть $R_1+R_2 = b$

$$\Rightarrow OP + R_1+R_1+R_2+R_2 = R = OK = OP+PO_1+O_1L+LO_2+O_2K$$

$$\frac{2R_1^2}{R_2-R_1} + 2R_1+2R_2 = R$$

$$\frac{R_1 b}{R_2-R_1} + R_1 + 2R_2 = R \Rightarrow b\,\frac{R_1+R_2-\cancel{R_1}}{R_2-R_1} + R_2 = R \qquad R_2\left(\frac{b}{R_2-R_1}+1\right) = R$$

$\boxed{4}$ (Продолж.)

Из $\triangle OO_1A$ (пр/уг)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R_1}{OO_1} = \frac{R_1\cdot(R_2-R_1)}{R_1\cdot b} = \frac{R_2-R_1}{b}$$

$$\Rightarrow R_2\cdot\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1\right) = R$$

$$R_2 = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}R$$

Если проведем из т. O_1 $\perp$ O_2B

$O_1F \perp O_2B$, то

O_1FBA – пр/уг

$\Rightarrow O_2F = R_2 - R_1$

Т.к. $O_1F \parallel OB$

$\Rightarrow \angle O_2O_1F = \angle O_2OB$ (соотв. углы при паралл. пр. O_1F и OB)

$= \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ Из $\triangle O_1O_2F$ (пр/уг)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R_2-R_1}{R_2+R_1}$$

$$\Rightarrow R_1\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right) = R_2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

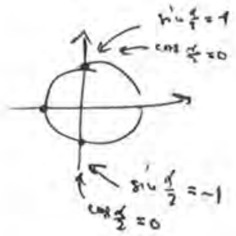
$$R_1 = \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+1}R_2$$

$$\Rightarrow b = R_1+R_2 = R_2\left(\frac{1-\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}+1+\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}+1}\right) = \frac{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}R$$

$$b\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}R \quad \text{– ф-ция от } \frac{\alpha}{2}$$

$$b' = 2R\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 - 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = 0$$

$\Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=0 \quad \sin\frac{\alpha}{2}=-1 \quad \sin\frac{\alpha}{2}=1$



$\Rightarrow \alpha = \pi + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ при $\alpha \in$ от 0 до π – $b\uparrow$

$\Rightarrow b_{max}$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow b_{max} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}R = \frac{4\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}R = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2}+1)^2}R = \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}R$

$$\frac{b_{max}}{R} = \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

5

Пусть $a_n = b_1$ $\quad b_1 \neq 0$

$a_{n-1} = b_1 q^1$ $\quad q \neq 0, \pm 1$

$\vdots$

$a_0 = b_1 q^n$

$\Rightarrow P_n(x) = b_1 (x^n + q_1 \cdot x^{n-1} + \ldots + q^{n-1} \cdot x + q^n)$

$\Rightarrow x^n + q x^{n-1} + \ldots + q^n = 0$

Если $x = -q$

чтобы в паре $-q^n$ сократ. с q^n

$\Rightarrow \underbrace{(-q)^n + (-q)^{n-1} \cdot q + \ldots + q^n}_{\text{четно при } n\text{ - нечёт.}} = 0 \Rightarrow$ n - должно быть нечётно

удивител. что кол-во членов - чётно

$\Rightarrow$ min нечёт. число 2024 — 2026 $\Rightarrow n = 2025$

$\Rightarrow$ Ответ: $x = -q$ при $n = $ ~~2047~~ ~~$\Rightarrow$ точно ед. корень~~

т.к. в разлож. $x^{2k} = -q^{2k} \Rightarrow \varnothing$

или же $\boxed{n = 2048} = 2048 - 1 = 2^{11} - 1$, чтобы всё выделялось в виде произвед.

$x^n + q x^{n-1} + q^2 x^{n-2} + \ldots + q^n \mid x + q$

$x^n + q x^{n-1} \quad\quad x^{n-1} + q^2 x^{n-3} \ldots$

$q^2 x^{n-2} + \ldots$

Пример n - нечётно $(n = 3)$

$(-q)^3 + (-q)^2 \cdot q + (-q) \cdot q^2 + q^3 = 0$

$-q^3 + q^3 - q^3 + q^3 = 0$

$0 = 0$

$\Rightarrow x^n + q x^{n-1} + q^2 \cdot x^{n-2} + \ldots + q^n =$

$= (x+q)(x^{n-1} + q^2 x^{n-3} + \ldots + q^{n-1}) =$

$= (x+q)\underbrace{(x^2 + q^2)}_{\text{нет корней}}(x^{n-3} \ldots + \ldots)$

будем выделять общую часть до конца

$\Rightarrow x^n + q x^{n-1} + \ldots + q^n = (x+q)(x^2+q^2)(x^4+q^4) \ldots$

Единств. корень $x = -q$

Нужно найти $\Rightarrow$ мин. n, при котором $S = \frac{2^n - 1}{2 - 1} \cdot 1 > 2024$ $\quad 2^n > 2025$ $\quad n = 11$ $\quad \Rightarrow S = 2047$

..."энергетики»

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

М10F01	Дистанционно, с использованием ВКС
№ группы	Место проведения

ОЈ19-23 ← Не заполнять. Заполняется ответственным работником

шифр

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ КОПАНЕВ

ИМЯ КИРИЛЛ

ОТЧЕСТВО АРТЕМОВИЧ

Дата рождения 23.04.2007 Класс: 10

Предмет МАТЕМАТИКА Этап: Заключительный

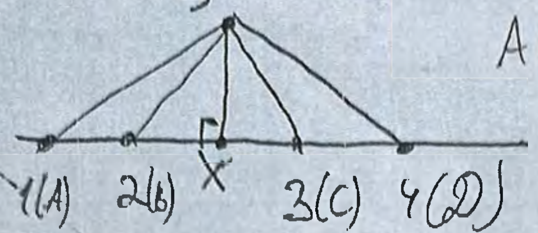
Работа выполнена на 10 листах Дата выполнения работы: 10.03.2024 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ОЈ19-23

№3



$AB=BC=CD=m$

Почему 3(C) правее чем X?

~~$AX=\frac{ЦA}{\cos\angle AЦX}$ $XC=$~~

Допустим левее, тогда:

$ЦA=\frac{ЦX}{\cos\angle AЦX}$, $ЦC=\frac{ЦX}{\cos\angle CЦX}$

если C левее X, то $\angle CЦX<\angle AЦX$

$\Rightarrow \cos\angle CЦX>\cos\angle AЦX$, т.к. $ЦX-const$

$\Rightarrow ЦA>ЦC$, но $2\sqrt{34}>6\sqrt{2}$ (12 > 9 примерно)

$\Rightarrow$ C правее X.

Расстояние $BC=m \Rightarrow CX=l$ (обозначим)

$\Rightarrow BX=m-l$. Посмотрим, что больше.

~~$\begin{cases} y^2+l^2=(2\sqrt{34})^2 \\ y^2+(m-l)^2 \end{cases}$~~ $\begin{cases} y^2+(l+m)^2=(6\sqrt{10})^2 \\ y^2+(m-l+m)^2=(6\sqrt{2})^2 \end{cases}$

где $y=ЦX$ (расписываю теорему Пифагора в $\triangle ЦAX$ и $\triangle ЦDX$)

$\begin{cases} y^2+l^2+2ml+m^2=360 \\ y^2+4m^2+l^2-4ml=72 \end{cases}$ $-$

$-3m^2+6ml=288$

$l=\frac{288+3m^2}{6m}$

Лист 06 из 10

Больше ли l чем $\frac{1}{2}m$?

$$\frac{288+3m^2}{6m}-\frac{1}{2}m \overset{?}{>} 0$$

$$\frac{288+3m^2-3m^2}{6m}>0$$

$$m>0 \Rightarrow \frac{288}{6m}>0$$

$$\Downarrow$$

$$CX>BX$$

Рассмотрим $\angle BYX$ и $\angle XYC$

$tg\angle BYX=\frac{BX}{YX}$, $tg\angle XYC=\frac{XC}{YX}$

$\Rightarrow \angle XYC>\angle BYX$

$\Rightarrow YC>BY$.

Было два варианта какая точка ближе 2 или 3 (т.к 1 и 4 заведомо дальше), но $YC>BY \Rightarrow$ точка 2 ближе $\Rightarrow$ ответ на первый вопрос $=m$ (расстояние AB (1 и 2))

$$y^2+l^2+2ml+m^2=360$$

$$y^2+\left(\frac{288+3m^2}{6m}\right)^2+2m\frac{288+3m^2}{6m}+m^2=360$$

$$\Downarrow$$

$y=BYX$ (расстояние) $=$

$$=\sqrt{360-m^2-\frac{288+3m^2}{3}-\left(\frac{288+3m^2}{6m}\right)^2}$$

Лист 06 из 10

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»
Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ 0119-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Теперь мы ~~знаем~~ знаем y.

$$(2\sqrt{34})^2 = m^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2\cdot m\, 6\sqrt{10}\cos\angle \text{ЦDX}$$

$$136 = m^2 + 360 - 12m\sqrt{10}\cos \text{ЦDX}$$

$$\frac{-224-m^2}{-12m\sqrt{10}} = \cos \text{ЦDX}$$ (теорема cos в △ЦCD)

$$\cos \text{ЦDX} = \frac{XD}{ЦD} = \frac{m + \frac{288+3m^2}{6m}}{6\sqrt{10}}$$

$$\frac{-224-m^2}{-12\cancel{\sqrt{10}}m} = \frac{m + \frac{288+3m^2}{6m}}{6\cancel{\sqrt{10}}}$$

Находим m:

$$\frac{-224-m^2}{-12\cancel{m}} = \frac{288+3m^2+6m^2}{36\cancel{m}}$$

~~$-108m^3 - 288\cdot 12m = -224\cdot 36m - 36m^3$~~

$$-108m^2 - 12\cdot 288 = -224\cdot 36 - 36m^2$$

$$-72m^2 = -4608$$

$$m = \sqrt{\frac{4608}{72}} = 8 \text{ км}$$

$$y = BЦ = \sqrt{360-64-160-100} = 6 \text{ км}$$

$\boxed{\text{Ответ: } (8;6;8) \text{ км}}$

±

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ 01 19-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

а) да может: $\underbrace{222\ldots2}_{2021}02$

б) Нет не может:

Рассмотрим последнюю цифру получившегося числа.

$2+8=10 \Rightarrow 0$ - эта цифра (т.к на 18 больше новое число, а первое оканчивается на 2)

$\Rightarrow$ предпоследняя цифра первого числа тоже 0 (т.к последняя во втором 0)

$\Rightarrow$ предпоследняя во втором 2, т.к $02+18=\underline{20}$

$$\overline{x02} \longrightarrow \overline{2y20}$$

Заметим, что в $\overline{2y20}$ не будет перехода через десяток $(02+18=20)$

$\Rightarrow \overline{x}=\overline{2y}$ (для того, чтобы все выполнялось)

~~Заметим, что $\overline{x02}$ и $\overline{2y20}$ $\vdots 3$~~

~~$\overline{x} \equiv_{mod 3} \overline{2y}$ $(r=1)$~~

~~Теперь~~ Поймем, ~~что~~ что т.к ~~перехода~~

~~через десяток не~~

Значит они состоят из одинаковых цифр (т.к равны) и т.к первая цифра $\overline{2y}$ это 2 ⇒ первая цифра $\overline{x}$ тоже 2 ⇒ Вторая цифра $\overline{2y}$ тоже 2 и т.д (из-за переноса цифр вперед)

$$\overline{x} = \overline{2y} = \underbrace{22222\ldots2}_{2022}$$

но $\underbrace{222\ldots202}_{2022} \not\vdots 3$

$\Rightarrow \not\vdots 6 \Rightarrow$ Нельзя придумать

+

№4

n – нечет ⇒ элементов многочлена четное число, рассмотрим

a_1x+a_0

если $x<0 \Rightarrow a_1x+a_0=a_1x+a_1q$

$a_1x+a_1q<0$ ($a_1>0$; $x,q<0$) ~~…~~ и ~~…~~ ($a_1>0$, если $a_n>0$)

А если наоборот $a_n<0 \Rightarrow a_1<0$

если $x<0 \Rightarrow a_1x+a_1q>0$ (т.к $a_1, x \le 0$; $a_1, q<0 \Rightarrow a_1x>0$, $a_1q>0$) $\Rightarrow a_1x+a_0 \neq 0$ (при $x<0$)

Разобьем многочлен по парам: (первый; второй) и т.д, значит ~~…~~ степень первого нечетна, а ~~…~~ второго четна (т.к начинаем с n-нечетного)

$\Downarrow$

Любая пара: $a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}$, где ~~…~~ $k\le n$

т.к k – нечет

$\Downarrow$

$x^{k-1}(a_kx+a_{k-1})$

$a_kx+a_{k-1} \neq 0$ (уже рассмотрели этот случай)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OJ19-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

а $x<0$, т.е $\neq 0 \Rightarrow x^{k-1} \neq 0$

$$\Downarrow$$

$$x^{k-1}(a_k x + a_{k-1}) \neq 0$$

Т.к в многочлене четное число элементов ⇒ мы можем все элементы включить в пары ⇒ ⇒ ничего не останется ⇒ ⇒ если сложить все пары (они $\neq 0$) ⇒ $P_n(x) \neq 0$

б) $P_n(x) = 0$ если все пары $=0$, т.е $x^{k-1}(a_k x + a_{k-1}) = 0 \Rightarrow a_k x + a_k q = 0$ ⇒ $x = -q$ $(-q > 0)$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OJ19-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

Легче посчитать ~~дни~~ где варианты перерыв более чем 2 дня и вычесть из общего: $C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 3} = 35$ всего вариантов. (4 блюда на 7 дней).

Рассмотрим все противоречащие варианты: где | - ест • - не ест

1) | • • • | | |

2) | | | • • • |

3) | | • • • | |

(перерыв между 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6)

4) | | | | • • • (4 и 7)

5) • • • | | | | (~~...~~ 0 и 4)

Больше вариантов нет, т.к. должно быть перерыв 3 дня, а всего блюд 4 ⇒ 4+3=7 (не может быть 2+3 или 4 дня перерыва) или ~~...~~ 1+3 дня

⇓

$35-5=30$

+

Лист 08 из 10

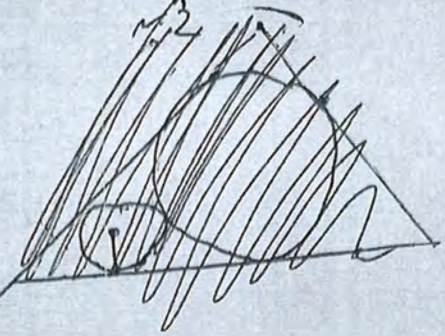
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

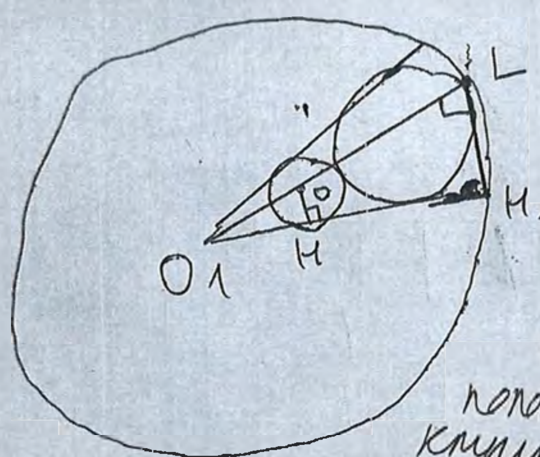
ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ OJ19-23

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~№3~~



№2



L - точка касания

⇓

$O_1LH_1 = 90°$

$OH = 90°$ (т.к. H - точка касания)

O_1OL делит $\angle\alpha$ пополам (т.к. OO_1 биссектриса из-за свойства касательных), у L та же самая ситуация $\Rightarrow O_1OL$ - одна прямая. $\Rightarrow$ ~~$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{OO_1} = \frac{LH_1}{}$~~

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{OO_1} = \frac{LH_1}{O_1H_1} = \frac{OH}{O_1H_1} = \frac{OH}{R}$$

⇓

$$OH = \sin\frac{\alpha}{2} \cdot R$$

⇓

~~$OH_{max} = R$ (при~~

при α почти $180°$ $\to OH = R$ (почти достигаем)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

M10F01	Дистанционно, с использованием ВКС
№ группы	Место проведения

OJ19-43

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Кораблин

ИМЯ Леонид

ОТЧЕСТВО Артёмович

Дата рождения 07.07.2007 **Класс:** 10

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

OJ19-43

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OJ19-43

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №1. Лист 1.

Дано: $\overline{x2} = A$; $A \vdots 6$; $\overline{2x} = A + 18$; $n = 2023$ – ? $n = 2024$ – ?

Пусть n – число знаков в числе A. Тогда:

$A = \overline{x2} = 10x + 2$

$\overline{2x} = 2 \cdot 10^{n-1} + x$

Из условия: $\overline{2x} = 2 \cdot 10^{n-1} + x = 10x + 20 = A + 18$

$2 \cdot 10^{n-1} = 9x + 20$

$2(10^{n-1} - 10) = 9x$

$20(10^{n-2} - 1) = 9x$

~~Из этого следует, что~~ $10^{n-2} - 1 = \underbrace{999\ldots9}_{n-2\ \text{зн.}}$

Очевидно, $99\ldots9 \vdots 9$, т.к. сумма цифр числа $\underbrace{99\ldots9}_{n-2} = 9(n-2) \vdots 9$

Значит, сократим равенство на 9, получим:

$20 \cdot \underbrace{111\ldots1}_{n-2\ \text{р.}} = x \Rightarrow x = \underbrace{111\ldots1}_{n-2\ \text{зн.}} \cdot 20 \overset{3}{\equiv} (n-2) \cdot 2 =$

$= 2n - 4 \Longrightarrow x$ должен быть сравним с $(2n-4)$ по модулю 3.

Т.к. $A \vdots 6 \Rightarrow A \vdots 2$ и $A \vdots 3$. $A \vdots 2$, т.к. оканчивается на двойку, а чтобы $A \vdots 3$, нужно чтобы сумма цифр числа x была сравнима с -2 по mod 3 $\Rightarrow x \overset{3}{\equiv} -2 \overset{3}{\equiv} 1$, т.к. сумма ~~на~~ ~~цифр~~ цифр даёт такой же остаток при делении на 3, как и само число.

Лист 01 из 08

OJ19-43

Задача №1. Лист 2

Но ранее мы получили, что $x \overset{3}{\equiv} 2n-4$.

Значит, $2n-4 \overset{3}{\equiv} 1$

$2n \overset{3}{\equiv} 5$

$2n \overset{3}{\equiv} 2$

$n \overset{3}{\equiv} 1$

Теперь найдём остатки от деления числа 2023 и 2024 на 3:

$2023 = 674 \cdot 3 + 1 \Rightarrow 2023 \overset{3}{\equiv} 1$ (V)

$2024 = 674 \cdot 3 + 2 \Rightarrow 2024 \overset{3}{\equiv} 2$ (x)

Т.к. 2023 и 2024 это число знаков, т.е. n, значит, чтобы условие задачи выполнялось, остаток этих чисел при делении на 3 должен быть равен 1. ⇒ В числе ~~…~~ не может быть 2024 знака, т.к. $2024 \overset{3}{\equiv} 2$.

Пример для $n = 2023$ следует из рассуждений выше: $A = \underbrace{222\ldots2}_{2021\text{ зн.}}00 + 2 = \underbrace{222\ldots22}_{2021\text{ зн.}}02$

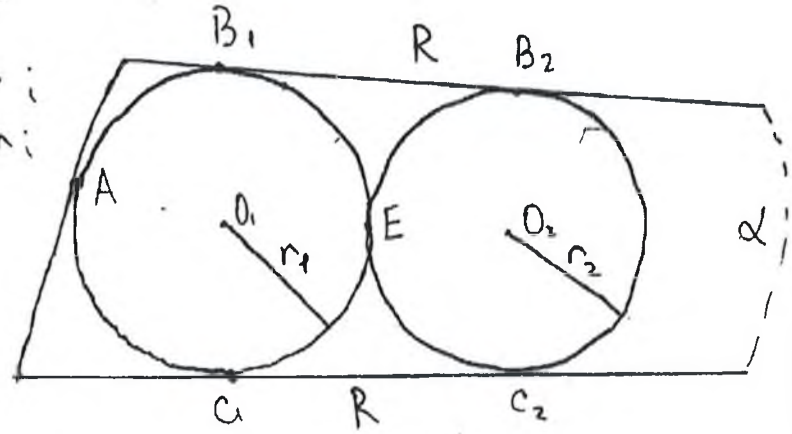
Это число делится на 6, т.к. оканчивается на чётную цифру, а сумма цифр = 4044 делится на 3.

При этом $A + 18 = \underbrace{222\ldots2}_{2022\text{ зн.}}0$, что соответствует перестановке двойки из конца в начало.

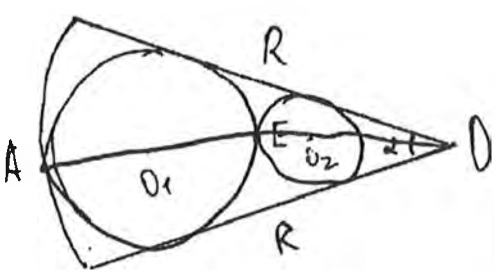
Ответ: 2023 – может
2024 – не может

Задача №2

Дано: Круговой сектор;
α - центральный угол;
O_1 касается O_2;
O_1 касается O.
Найти: $\left(\frac{r_2}{R}\right)_{max}$ - ?
$\frac{r_2}{R}(\alpha)$ - ?



Решение:

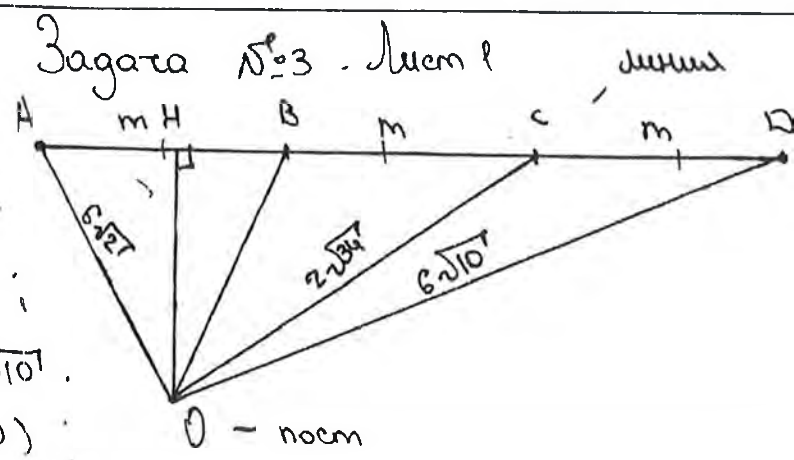


1) Если A - точка касания большой окружности с большей вписанной, а E - точка касания вписанных окружностей, то AEO - прямая, т.к. все точки окружности равноудалены от её центра, но касаться обеих радиус-секторов окружности будут только в том случае, когда O_1 и O_2 лежат на биссектрисе α $\Rightarrow$ OO_2EO_1A - прямая.

2) $\alpha \leq 90°$, иначе невозможны все описанные касания одновременно:

3)

Задача №3. Лист 1



Дано: $ABCD$ – прямая; $AB = CD = BC = m$; $AO = 6\sqrt{2}$; $OC = 2\sqrt{34}$; $OD = 6\sqrt{10}$.

Найти: AH ($OH \perp AD$); OH, m

Решение: 1) Наименьшее расстояние от точки до прямой это перпендикуляр, из чего можно сказать, что в задаче требуется найти именно AH, OH.

2) Применим формулы площади Δ для ΔAOC:

$S_2 = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot OH = m\cdot OH$

$S_1 = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(3\sqrt{2}+\sqrt{34}+m)(3\sqrt{2}+\sqrt{34}-m)\cdot(\sqrt{34}+m-3\sqrt{2})(m+3\sqrt{2}-\sqrt{34})} = \sqrt{(52+12\sqrt{17}-m^2)(m^2-52+12\sqrt{17})} = \sqrt{-(m^2-52)^2+2448}$

$S_1 = S_2 \Rightarrow \sqrt{2448-(m^2-52)^2} = m\cdot OH \quad |^2 \leftarrow$ [Нужно в п.4 (4)]

$2448 - (m^2-52)^2 = m^2\cdot OH^2$

$-m^4 + 104m^2 - 52^2 + 2448 - m^2\cdot OH^2 = 0$

Пусть $t = m^2$. Тогда:

$-t^2 + t(104 - OH^2) - 256 = 0$

$D = (104-OH^2)^2 - 1024 = (72-OH^2)(136-OH^2)$

$t = \frac{-104+OH^2 \pm \sqrt{(72-OH^2)(136-OH^2)}}{-2} = 52 - OH^2 \pm \sqrt{(72-OH^2)(136-OH^2)}$

$m^2 = 52 - OH^2 \pm \sqrt{(72-OH^2)(136-OH^2)}$

3) Кроме этого, рассмотрим ΔAOH, ΔOHC и ΔDOH. Они прямоугольные $\Rightarrow$ применим т. Пифагора:

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3. Лист 2

$$\begin{cases} (2m+HB)^2+OH^2=360 & (\text{из } \Delta DOH) \\ (m+HB)^2+OH^2=136 & (\text{из } \Delta COH) \\ (m-HB)^2+OH^2=72 & (\text{из } \Delta AOH) \end{cases}$$

1) Вычтем из 1-ого ур-я 2-ое:

$3m^2+2m\cdot HB=224$

2) Вычтем из 2-ого ур-я 3-ее:

$4m\cdot HB=64 \Rightarrow mHB=16$

3) Из 1-ого равенства:

$3m^2+32=224$

$3m^2=192$

$m^2=64$

$m=8$, т.к. $m>0$

4) Подставим полученное в равенство (4):

$\sqrt{2448-(64-52)^2}=8OH$

$\sqrt{2448-144}=8OH$

$\sqrt{2304}=8OH$

$48=8OH$

$OH=6$

5) Найдем AH из т. Пифагора для ΔAOH:

$(6\sqrt{2})^2=AH^2+OH^2$

$72=AH^2+36$

$AH=6$

(+)

Ответ: От первой подстанции на раст. 6 км
Пост от линии на раст. 6 км
$m=8$ км.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4. Лист 1

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n = 2k+1$

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ — геом. прогрессия с $q<0$

А) Если q - знаменатель данной геом. прогрессии, то $a_{n-1} = a_n q$; $a_{n-2} = a_n q^2$; …; $a_1 = a_n q^{n-1}$; $a_0 = a_n q^n$

$P_n(x) = a_n x^n + a_n q x^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1} x + a_n q^n$.

Заметим, что данный многочлен симметричен относительно q и x: если заменить x на q, а q на x, то выражение останется тем же. Пусть нашлось такое x_0, что:

$$P_n(x_0) = 0 \Rightarrow a_n x_0^n + a_n q x_0^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1} x_0 + a_n q^n = 0$$

$$a_n(x_0^n + q x_0^{n-1} + \ldots + q^{n-1} x_0 + q^n) = 0$$

$$a_n \neq 0 \Rightarrow x_0^n + q x_0^{n-1} + \ldots + q^{n-1} x_0 + q^n = 0$$

Если $x_0 < 0$, то $x_0^n < 0$ (т.к. n - нечет), $x_0^{n-1} q < 0$ (т.к. $x_0^{n-1} > 0$, а $q<0$), …, $q^{n-1} x_0 < 0$, $q^n < 0$ $\Rightarrow$ $x_0^n + q x_0^{n-1} + \ldots + q^{n-1} x_0 + q^n$ — это сумма $n+1$ отрицательного слагаемого. Но она должна быть равна 0, что невозможно, т.к. 0 не отрицательный.

Осталось заметить, что у любого многочлена нечётной степени есть корень, поэтому x_0 всегда найдётся.

Ч.т.д.

Б). Для начала заметим, что у многочлена

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №4. Лист 2

n-ой степени $\leq n$ вещественных корней $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ положительных из них тоже $\leq n$. В п.
А) мы доказали, что все вещественные корни $P_n(x)$ положительны $\Rightarrow$ подсчёт числа корней >0 эквивалентен подсчёту общего числа корней:

Заметим, что $P_n(x) = a_n x^n + a_n q x^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1} x + a_n q^n = a_n(x+q)(x^{n-1} + q^2 x^{n-3} + \ldots + x^2 q^{n-3} + q^{n-1})$, т.к. в многочлене чётное число слагаемых, их можно разбить на пары вида ~~…~~ $a_n q^k x^{n-k} + a_n q^{k+1} x^{n-k-1} = a_n q^k x^{n-k-1}(x+q)$.

Отсюда видно, что $P_n(x) = 0$, когда $\underline{x = -q}$, т.к. в таком случае $x + q = 0$.

Продолжая выносить подобным образом множители, получим, что $P_n(x) = a_n(x+q)(x^2+q^2)\cdot(x^4+q^4)\cdot\ldots\cdot H(x)$, где $H(x) > 0$, т.к. там останутся только слагаемые чётной степени с положительными коэффициентами (т.к. q остаётся только в чётной)
Также заметим, что $x^2 + q^2 > 0$, $x^4 + q^4 > 0$ и т.д., т.к. $q^{2k} > 0$ и $x^{2k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Пример:
$x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 27x^2 + 81x - 243 = (x-3)(x^4 + 9x^2 + 81)$

Таким образом, равной нулю может быть только скобка $x+q$, которая даёт корень $x = -q$. Значит, это единственный возможный корень

Ответ: max 1 корень, равный $-q$.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ OJ 19-43

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5. ~~Лист 1~~

Дано: 4 сосиски, 7 дней, ≤ 2 дней перерыва.

Для начала найдём общее число способов без учёта ограничения. Оно равно C_7^4:

$C_7^4 = \frac{7!}{3!\,4!} = 35$

Теперь посчитаем число неудовлетворительных способов. В таком случае у людоеда возникает ≥ 3 дней перерыва. Заметим, что их ровно 3. Иначе у людоеда ≥ 4 дней, когда он не ест и 4 дня, когда есть, т.е. суммарно ≥ 8 дней, а их по условию 7.

Тогда нужно, чтобы эти 3 дня стояли подряд. Объединим их в один объект. Тогда получим, что нам нужно посчитать число способов поставить этот объект на одно из 5 мест, кроме крайних (тогда перерывы будут не между сосисками, а либо до, либо после поедания любой из сосисок, это нас устраивает). Крайних ровно 2 ⇒ посчитаем кол-во способов поставить объект на одно из 3 мест. Их, очевидно, 3: $\overset{0}{\_}\,\_\,\_$, $\_\,\overset{0}{\_}\,\_$, $\_\,\_\,\overset{0}{\_}$.

Значит, удовлетворяющих условию способов $35 - 3 = 32$.

(−)

Ответ: 32.

Неверно

OJ19-43

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Чебоксары	NJ35-56
Место проведения	шифр

← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником

Вариант № 17881

ФАМИЛИЯ Кузнецова

ИМЯ Екатерина

ОТЧЕСТВО Андреевна

Дата рождения 13.07.2009 **Класс:** 8

Предмет математика **Этап:** заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Kuz

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Задача 1.

Т.е. было число $\overline{1abcde}$, а получилось $\overline{abcde1}$, где

$\overline{abcde1} : \overline{1abcde} = n \quad (n \ni N)$

Значит,

$\overline{1abcde} \cdot n = \overline{abcde1}$

Число оканчивается на один, т.е. $e \times n = \cdot 1$

Варианты: $9\times 9 = 81$, $7 \times 3 = \cancel{8}21$, ~~$1\times 1 = 1$~~, $3 \times 7 = 21$ — $n > 1$, но $n < 10$

Если 9×9, то

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8\,8\,8\,8\,8} \\ \times\; 1abcd9 \\ 9 \\ \hline 1799991 \end{array}$$

$d\cdot 9 + 8 = \cdot 9 \Rightarrow d = 9$

$c \cdot 9 + 8 = \cdot 9 \Rightarrow c = 9$

$b \cdot 9 + 8 = \cdot 9 \Rightarrow b = 9$

$a \cdot 9 + 8 = \cdot 9 \Rightarrow a = 9$

Но тогда получившееся число семизначное, значит,

$e \neq 9$

$n \neq 9$

Тогда 3×7:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2\,2\,2\,2\,2} \\ \times\; 1abcd3 \\ 7 \\ \hline 933331 \end{array}$$

$d \cdot 7 + 2 = \cdot 3 \Rightarrow d = 3$

$c \cdot 7 + 2 = \cdot 3 \Rightarrow c = 3$

$b \cdot 7 + 2 = \cdot 3 \Rightarrow b = 3$

$a \cdot 7 + 2 = \cdot 3 \Rightarrow a = 3$

Но тогда a должно быть равно 9, что неверно,
значит $e \neq 3$
$n \neq 7$.

Тогда 7×3

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 0\,2\,1\,2} \\ \times\; 1abcd7 \\ 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

$d \cdot 3 + 2 = \cdot 7 \Rightarrow d = 5$

$c \cdot 3 + 1 = \cdot 5 \Rightarrow c = 8$

$b \cdot 3 + 2 = \cdot 8 \Rightarrow b = 2$

$a \cdot 3 = \cdot 2 \Rightarrow a = 4$

Всё подходит, значит, число $A = 142857$

Ответ: $A = 142857$.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17881 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ NJ35-56

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2

Пусть V - объём двигателя

n - кол-во сотен километров.

X - кол-во раз когда заправлялся.

~~Тогда $\frac{V\cdot X}{n}$ - идеальное значение.~~

~~То значение, которое посчитал шофёр, равно.~~

~~$<\frac{XV+0{,}25V}{n}$, т.к. объём, оставшийся $<\frac{1}{4}V$, т.е. эти значение были посчитаны сверх.~~

Тогда шофёр считал значение по формуле:

$\frac{V\cdot X}{n}$

Но на самом деле объёма было меньше; минимальное значение потраченного объёма $XV - 0{,}25V$, т.е.

нужно было считать в худшем случае:

$\frac{XV-0{,}25V}{n}$ - это идеальное (или истинное) значение.

Значит,

$1{,}01\left(\frac{XV-0{,}25V}{n}\right) \geq \frac{XV}{n} \quad \Big| : \frac{V}{n}$

$1{,}01X - 1{,}01\cdot 0{,}25 \geq X \quad | \cdot 100$

$101X - 101\cdot 0{,}25 \geq X\cdot 100$

$X \geq \frac{101}{4}$

$X > \approx 25$

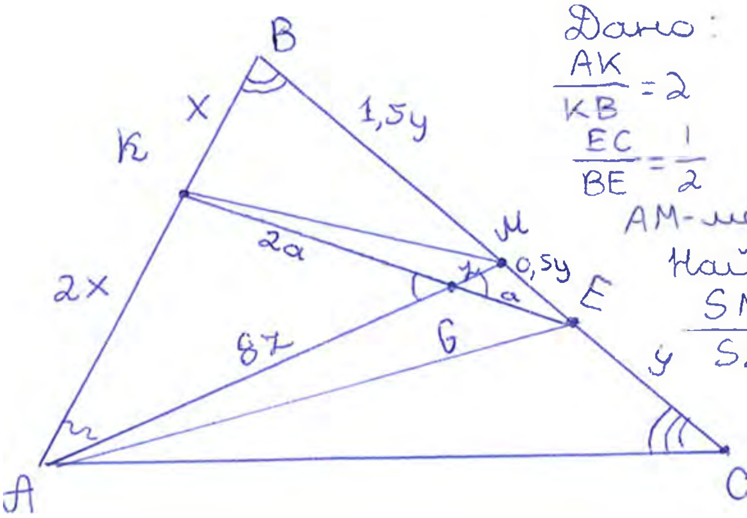
Т.е. хотя бы 25 раз в худшем случае

Если объём увеличить в 1,5 раза ответ не ~~играет роли~~ изменится, ведь данное значение не зависит от объёма.

Ответ: 25 раз.

+

Задача 3.



Дано:

$\frac{AK}{KB} = 2$

$\frac{EC}{BE} = \frac{1}{2}$

AM – медиана.

Найти:

$\frac{S_{MGKB}}{S_{\Delta ABC}}$ – ?

Решение:

1) В ΔABM по т. Менелая:

$\cancel{\frac{AK}{KB}}$

$\frac{KB}{AK} \cdot \frac{AG}{MG} \cdot \frac{ME}{BE} = 1$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{AG}{MG} \cdot \frac{1}{4} = 1$

$\frac{AG}{MG} = 8 \Rightarrow$ Пусть $AG = 8z$, $MG = z$

2) В ΔEBK по т. Менелая:

$\frac{BM}{ME} \cdot \frac{EG}{KG} \cdot \frac{AK}{AB} = 1$

$\frac{EG}{KG} \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} = 1$

$\frac{EG}{KG} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Пусть $EG = a$, $KG = 2a$

3) ΔCAM и ΔCAB имеют общий угол $C \Rightarrow \frac{S_{\Delta CAM}}{S_{\Delta CAB}} = \frac{AC \cdot y}{AC \cdot 2y} = \frac{1}{2}$

4) ΔAEC и ΔCAM имеют общий угол $C \Rightarrow \frac{S_{\Delta AEC}}{S_{\Delta CAM}} = \frac{AC \cdot y}{AC \cdot 1{,}5y} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta CAM} = S_{\Delta AEC} + S_{\Delta AME} \Rightarrow S_{\Delta AME} = \frac{1}{3} S_{\Delta CAM} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}$

5) ΔGAE и ΔMAE имеют общий $\angle MAE \Rightarrow \frac{S_{\Delta GAE}}{S_{\Delta AME}} = \frac{AE \cdot 8z}{AE \cdot 9z} = \frac{8}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\Delta AME} = S_{\Delta GAE} + S_{\Delta GME} \Rightarrow S_{\Delta GME} = \frac{1}{9} S_{\Delta AME} = \frac{1}{54} S_{\Delta ABC}$.

6) $\angle KGA = \angle MGE$, т.к. они вертикальные.

7) ΔKGA и ΔMGE имеют равные $\angle KGA = \angle MGE \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{\Delta MGE}}{S_{\Delta KGA}} = \frac{z \cdot a}{2a \cdot 8z} = \frac{1}{16} \Rightarrow S_{\Delta KGA} = \frac{16}{54} S_{\Delta ABC}$

8) ΔKAM и ΔKAG имеют общий угол $KAG \Rightarrow \frac{S_{\Delta KGA}}{S_{\Delta KAM}} = \frac{2x \cdot 8z}{2x \cdot 9z} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow S_{\Delta KAM} = S_{\Delta KGA} + S_{\Delta KGM} \Rightarrow S_{\Delta KGM} = \frac{1}{8} S_{\Delta KGA} = \frac{1}{27} S_{\Delta ABC}$.

9) ΔBKM и ΔBAC имеют общий угол $B \Rightarrow \frac{S_{\Delta BKM}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{1{,}5xy}{9xy} = \frac{1}{6}$

10) $S_{MGKB} = S_{\Delta BK\cancel{B}M} + S_{\Delta KGM} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} + \frac{1}{27} S_{\Delta ABC} = \frac{11}{54} S_{\Delta ABC}$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 4.

Рассмотрим варианты, когда между любыми приёмами пищи есть хотя бы один день, вне зависимости от того, что это:

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС
V		V		V		
V		V			V	
V		V				V
V			V		V	
V			V			V
V				V		V
	V		V		V	
	V		V			V
	V			V		V
		V		V		V

Всего 10 вариантов. И в каждом варианте блюда можно менять между собой местами 3-мя способами:

П П Ш (I)
П Ш П (II)
Ш П П (III)

т.е. в данной ситуации всего 30 способов распределить блюда по дням

Но также есть случаи, где два, т.е. в соседние дни он ест „Путаника"; посчитаем кол-во вариантов.

ПН	ВТ	СР	ЧТ	ПТ	СБ	ВС	
Ш					П	П	1
Ш				П	П		2
Ш			П	П			3
Ш		П	П				4
	Ш		П	П			5
	Ш			П	П		6
	Ш				П	П	7
		Ш		П	П		8
		Ш			П	П	9
П	П		Ш				10
			Ш		П	П	11
П	П			Ш			12
	П	П		Ш			13
П	П				Ш		14
	П	П			Ш		15
		П	П		Ш		16
П	П					Ш	17
	П	П				Ш	18
		П	П			Ш	19
			П	П		Ш	20

Это ещё 20 новых вариантов.

Значит, есть всего есть 50 способов.

Ответ: 50 способов.

Существенно нерациональный путь решения

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 5.

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x-2024}}}}=1+\frac{1}{\frac{1}{0,2}-1};\ x\neq 2024$$

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{x-2025}{x-2024}}}}=1+\frac{1}{4}$$

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\frac{x-2024}{x-2025}}}=1,25;\ x\neq 2025$$

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\frac{-1}{x-2025}}}=1,25$$

$$1-\frac{1}{1+x-2025}=1,25$$

$$1-\frac{1}{x-2024}=1,25$$

$$\frac{x-2025}{x-2024}=\frac{5}{4}$$

$$4x-2025\cdot 4=5x-2024\cdot 5$$

$$x=2024\cdot 5-2025\cdot 4$$

$$x=2020$$

Ответ: $x\in\{2020\}$

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

M11F02.	Дистанционно, с использованием ВКС

№ группы Место проведения

ZA 48-80

шифр

← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Куркула

ИМЯ Павел

ОТЧЕСТВО Юрьевич

Дата рождения 18.11.2005. **Класс:** 11

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 8 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024 (число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ZA48-80

№1.

Нельзя, чтоб было 3 или 4 голодных дня подряд. Вычтем из кол-ва способов выбрать 4 голодных дня из 10 кол-во способов, где выбрано 3 или 4 голодных дня подряд.

Всего выбрать 4 голодных дня из 10: C_{10}^{4}.

Кол-во способов, когда 4 голодных дня идут подряд: $C_7^1 = 7$ (т.е. кол-во способов расставить 7 элементов, 6 из которых — обычные дни, 1 элемент — 4 подряд идущих голодных дня, в ряд без учета порядка)

Посчитаем кол-во способов, где ровно 3 голодных дня идут подряд. Возьмем 3 голодных подряд идущих дня за один элемент A. ~~Выбрать элемент A, т.е. выбрать из 4 голодных дней ровно 3 дня, которые будут идти подряд: C_4^3. (без учета порядка)~~

1) Элемент A в начале $10^{ти}$ дневки:

A _ _ _ _ _ _ _ _ ~~дня~~

не голод. день. — можно голод. день.

Тогда способов расставить оставшийся голодный день: 6 ~~способов~~. (на любое из ~~7~~ 6 мест, т.е. кроме места рядом с A)

2) Элемент A в конце $10^{ти}$ дневки:

_ _ _ _ _ _ _ _ _ A

можно голод. день. — не голод. день.

Абсолютно идентичный подсчёт, как и в 1): 6 способов.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ ZA 48-80

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

3) Элемент А не первый и не последний:

$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{}$

можно А, а рядом с ним нельзя голодный день.

Расставить А среди недель:

$C_6^1 = 6$ способов.

Рядом с элементом А есть 2 места, на которые нельзя ставить голодный день, т.е. остается 5 способов расставить оставшийся голодный день. Итого в этом случае: $6 \cdot 5 = 30$

Всего способов, где ровно 3 голодных дня идут подряд: $30+6+6 = 42$.

Всего не подходящих способов, когда 3 или более голодных дня идут подряд: $42+7 = 49$.

Значит случаев, когда не более 2х голодных дней в 10ти дневке идут подряд: $C_{10}^4 - 49 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} - 49 =$

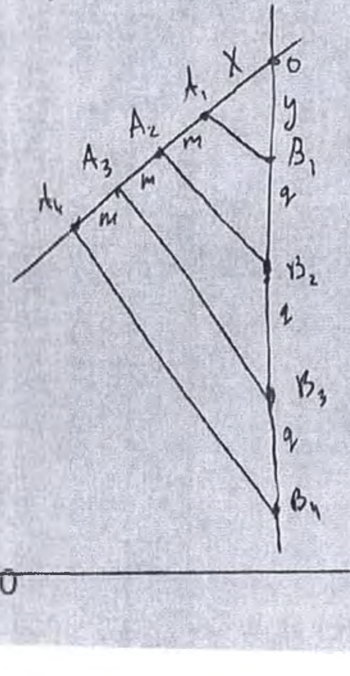
$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - 49 = 210 - 49 = 161.$$

+

Ответ: 161 способ.

№2.

Предположим, линии пересекаются в O.



По th. Фалеса, т.к. $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = m$ и $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = q$ $\Rightarrow A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$

Из подобия Δ-ов ΔOA_1B_1 и ΔOA_3B_3:

$$\frac{A_1B_1}{A_3B_3} = \frac{x}{x+2m} = \frac{y}{y+2q}$$ где x и y – расстояние от A_1 и B_1 до O соответственно.

$$\frac{x}{x+2m} = \frac{15\sqrt{2}}{5\cdot\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Из подобия Δ-ков ΔA_1OB_1 и ΔA_4OB_4:

$$\frac{A_1B_1}{A_4B_4}=\frac{x}{x+3m}=\frac{y}{y+3q}\Rightarrow\frac{x}{x+3m}=\frac{15\sqrt{2}}{15\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Получаем систему:

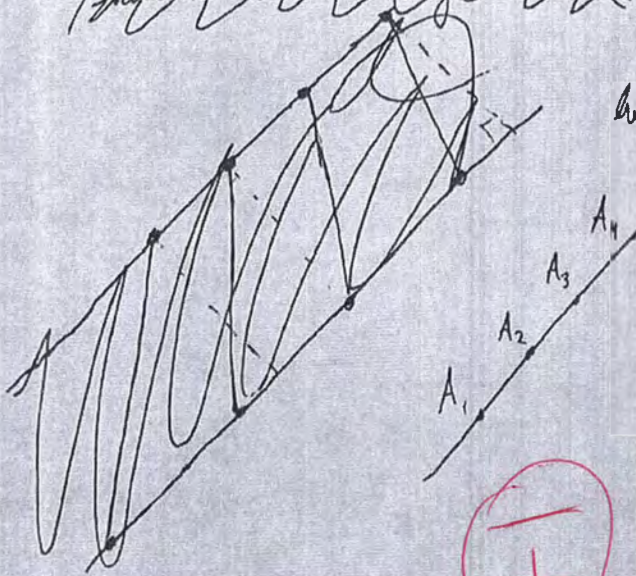
$$\begin{cases}\sqrt{17}x=3x+6m\\ \sqrt{5}x=x+3m\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{m}=\dfrac{6}{\sqrt{17}-3}\\ \dfrac{x}{m}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-1}\end{cases}\varnothing,\text{ но }\frac{6}{\sqrt{17}-3}\neq\frac{3}{\sqrt{5}-1},\text{ т.к. }6\sqrt{5}-6\neq3\sqrt{17}-9$$

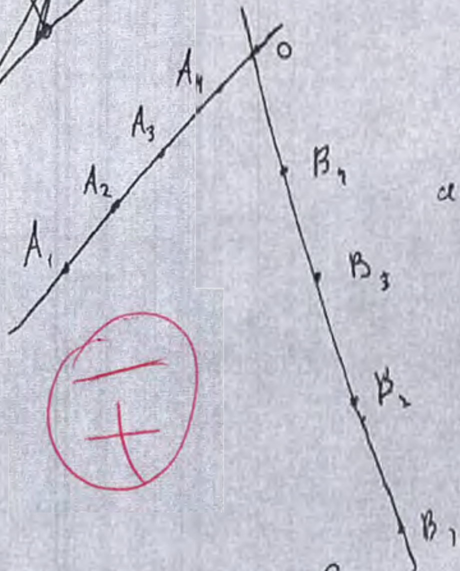
$$\Downarrow$$

$$180\neq162-6\sqrt{17}.$$

~~Значит линии параллельны.~~



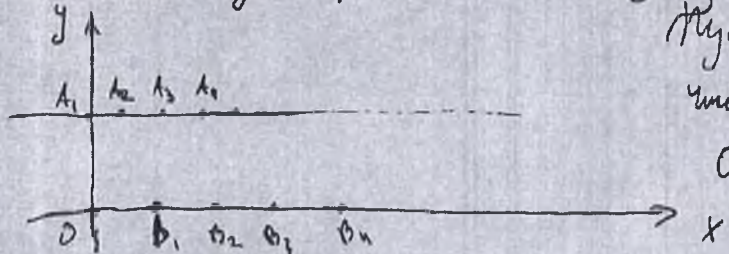
Если же пересечение выглядит иным образом:



то $B_1A_1>A_4B_4$, то $A_1B_1<30$ ($15\sqrt{2}<30$) а $B_4A_4>30$ ($15\sqrt{10}>30$).

Такого быть не может.

Таким образом, линии могут быть только параллельны. Пусть линия B соответствует оси OX в координатной плоскости. y_0 – расстояние между линиями:



Пусть начало O выбрано так, чтоб точка A_1 лежала на OY. Точка B_1 имеет координату x_0. Тогда рассмотрим

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Длины A_1B_1, A_3B_3 и A_4B_4:

$$y_0^2 + x_0^2 = 225\cdot 2 \leftarrow A_1B_1$$

$$y_0^2 + (x_0 + 2q - 2m)^2 = 25\cdot 34.$$

$$y_0^2 + (x_0 + 3q - 3m)^2 = 225\cdot 10.$$

№3.

~~После перестановки:~~ ~~$= B + 3\cdot 10^k$~~ ~~k – кол-во цифр в части B числа A.~~

$\overline{B}$ – часть числа A до цифры 3.

$A = \overline{B}\cdot 10 + 3$ $\quad (A = \underbrace{\overline{\ldots\ldots}}_{B}3)$ $\quad A \vdots 99.$

После преобразования: $\overline{3\underbrace{\ldots\ldots}_{B}} = 3\cdot 10^n + B$, где n – кол-во цифр в записи части B у числа A.

$3\cdot 10^n + B = 10B + 27 + 3$

$3\cdot 10^n - 30 = 9B.$ (*) Рассмотрим обе части равенства сравнения по модулю 9:

mod 9: $3\cdot 10^n \underset{9}{\equiv} 3\cdot 1^n \underset{9}{\equiv} 3 \qquad 9B \underset{9}{\equiv} 0$

$-30 \underset{9}{\equiv} 6$

$\Downarrow$

$3 + 6 \underset{9}{\equiv} 0$ ← верно для любого B.

Т.к. $A \vdots 99$, то $A \vdots 9 \Rightarrow A \underset{9}{\equiv} 0 \pmod 9$.

$10B \underset{9}{\equiv} B \pmod 9$.

$\Downarrow$

$3 + B \underset{9}{\equiv} 0 \pmod 9 \Rightarrow B \underset{9}{\equiv} 6 \pmod 9$.

$A \vdots 99 \Rightarrow A \vdots 11 \Rightarrow A \underset{11}{\equiv} 0 \pmod{11}$.

$10B \underset{11}{\equiv} -B \pmod{11} \Rightarrow -B + 3 \underset{11}{\equiv} 0 \pmod{11}$.

$\Downarrow$

$B \underset{11}{\equiv} 3 \pmod{11}$

$A \vdots 99 \Rightarrow A \vdots 3 \Rightarrow A \underset{3}{\equiv} 0 \pmod 3$

$10B \underset{3}{\equiv} B \pmod 3 \Rightarrow B + 0 \underset{3}{\equiv} 0 \pmod 3 \Rightarrow B \equiv 0 \pmod 3$.

Заметим, что т.к. получается число, большее исходного A на 27, то

$$\begin{array}{r} 3\underbrace{\ldots\ldots}_{B} \\ -\ \underbrace{\ldots\ldots}_{B}3 \\ \hline 7 \end{array}$$

← B заканчивается на 0, т.е. $B \vdots 10$.

Также заметим, что при умножении 99 на какое-либо число цифра 3 возникает на конце только при умножении 99 на $10m+7$, где $m \in N$.

$A = 99\cdot(10m+7) = 990m + 693 = (99\cdot m)\cdot 10 + 693.$

Вторая цифра числа A – это 10 (т.к. $B \vdots 10$).

Рассмотрим $99m\cdot 10$. – последняя цифра этого числа 0, при сложении с 693 последняя цифра числа A будет 3. Значит, при сложении "9" из 693 с предпоследней цифрой числа $99m\cdot 10$ должно получиться "10", чтоб число B заканчивалось на 10. => предпоследняя цифра числа $99m\cdot 10$ может быть только 1 (т.к $9+1=10$, а при сложении $3+0=3$ ← не добавляет десятков в следующий разряд) => чтоб предпоследняя цифра числа $99m\cdot 10$ была равна 1, то это возможно только при $m = 10k+9$ =>

=> $9900k + 8910 + 693 = 9900k + 9603 = A$.

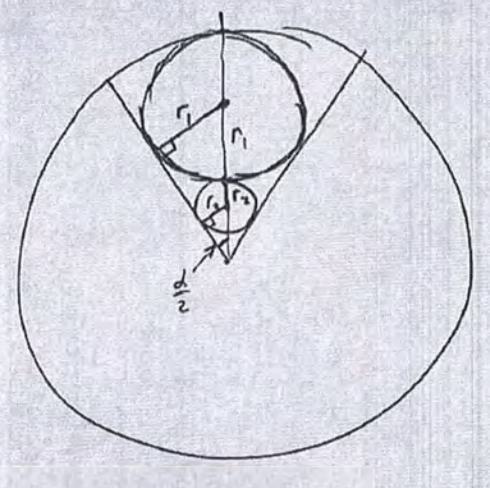
A становится слишком большим с ростом k =>

=> единственное, что может подходить, это при $k=0$ =>

=> $A = 9603$ => не подходит => Ответ: таких чисел нет.

+

№4.



Расстояние м/у центрами: $r_1 + r_2$

(r_1 – радиус большей, r_2 – радиус меньшей)

$$\frac{r_1}{R - r_1} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow r_1 = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\frac{r_2}{R - 2r_1 - r_2} = \sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = R\sin\frac{\alpha}{2} - 2\cdot\frac{R\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} - r_2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}.$$

$$r_2 = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2} + R\sin^2\frac{\alpha}{2} - 2R\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$r_1 + r_2 = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = \frac{R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) + R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}.$$

Искомое соотношение: $\frac{r_1+r_2}{R} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} =$

$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} = A$. Максимизируем A. Пусть $\sin\frac{\alpha}{2} = t$ $\Rightarrow$ $-1 \le t \le 1$

$$\Rightarrow A'(t) = \left(\frac{2t}{(1+t)^2}\right)' = \frac{2(t+1)^2 - 2(1+t)2t}{(1+t)^4} = \frac{2t^2+4t+2-4t^2-4t}{(1+t)^4} =$$

$$= \frac{-2t^2+2}{(1+t)^4} = -2\frac{(t-1)(t+1)}{(1+t)^4}$$

Исследуем знаки производной: т.к. $-1 \le t \le 1$, то на промежутке $t \in [-1; 1]$ $A'(t) > 0 \Rightarrow A(t) \uparrow$ монотонно. $\Rightarrow t = 1$ – макс, $A'(1) = 0$.

$t = -1$. – минимум, $A'(-1) = 0$.

макс. функции $A(t)$ может реализовываться при $t = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = 1$, но т.к. $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ нет α, принадлежащих промежутку.

Т.к. на промежутке $A(t)\uparrow$ монотонно, то макс. значение функции $t \in (0; \frac{\sqrt{2}}{2}]$, т.е. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}]$ $A(t)$ будет реализовываться в конце отрезка, т.е. при $t = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}. \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$$

+

Ответ: макс. отношение равно $\frac{4\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$. Оно достигается при $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

№5.

$a_{n-1} = q a_n$, $a_{n-2} = q^2 a_n$ ... $a_1 = q^{n-1} a_n$, $a_0 = q^n a_n$

$$a_n x^n + q a_n x^{n-1} + \ldots + q^{n-1} a_n x + q^n a_n = 0.$$

+

$$a_n \neq 0 \Rightarrow x^n + q x^{n-1} + \ldots + q^{n-1} x + q^n = 0$$

Воспользуемся критерием Эйзенштейна о приводимости, т.е. разложении многочлена. Согласно ему, если все коэф., кроме коэф. при старшем члене, делятся на некоторое число a и свободный член не делится на a^2, то многочлен можно разложить на множители. Таким образом, взяв минимальную степень $n = 2026$, мы получим:

вольная ф-ка

$x^{2026} + q x^{2025} + \ldots + q^{2025} x + q^{2026} = 0$ и коэф. при x^{2026} равен 1 — не делится на q. Все остальные коэф. делятся на q, а последний делится на q^2:

$q^{2026} \vdots q^2 \Rightarrow$ противоречие с критерием Эйзенштейна, многочлен $P(x)$ 2026 степени не приводим, значит не имеет действ. корней $\Rightarrow$ мин. возможное кол-во действ. корней 0. Ответ: 0 корней, и пример при $n=2026$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

КГЭУ	IL98-58	← Не заполнять Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ ЛАТИПОВА

ИМЯ АЛИЯ

ОТЧЕСТВО АЛМАЗОВНА

Дата рождения 06.07.2006 **Класс:** 11

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 08 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

Задание 1

Сначала посчитаем, сколько всего способов распределить дни. Для этого посчитаем, сколько способов выбрать 4 голодных дня из 10.

$$\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2} = 10\cdot3\cdot7 = 210$$ ✓

(делим на 4!, т.к. порядок выбора голодных дней не важен)

Найдем, сколькими способами можно распределить дни, чтобы было 4 голодных дня подряд.

Их 7, т.к. четверка голодных дней может начинаться с {1; 2; ... 7}

Далее найдем сколькими способами можно выбрать 3 дня подряд и еще один не подряд

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Если тройка голодных дней начинается с 1 или с 8, то последний день можно выбрать шестью способами (4 или 7 нельзя будет взять, а то получится 4 подряд голодных дня)

(есть продолжение)

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

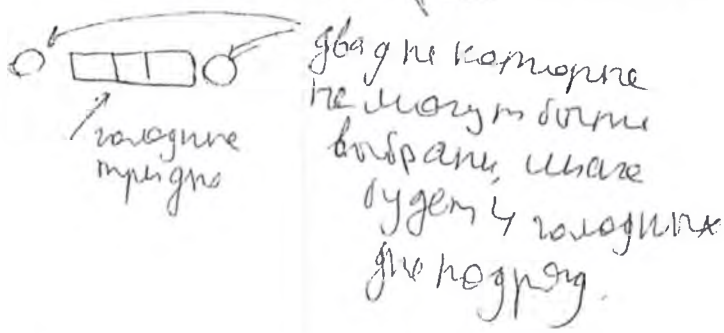
Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ IL 98-58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 1 (Часть 2)

Рассмотрим, когда тройка голодных дней начинается с $\{2; 3 \ldots 7\}$. Тогда четвёртый голодный день может быть выбран пятью способами



Кол-во ~~способов~~ способов выбрать более двух голодных дней подряд:

$$7 + 2 \cdot 6 + 6 \cdot 5 = 7 + 12 + 30 = 7 + 42 = 51$$

Кол-во способов выбрать, чтобы не было более двух голодных дней подряд.

$$210 - 51 = 159$$

$\pm$

Ответ: 159 способов

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 3

Пусть A число вида $\overline{a_n \dots a_3 a_2 a_1 3}$

изменённое число: $\overline{3 a_n \dots a_3 a_2 a_1}$

$$\begin{array}{r} - \; a_4 a_3 a_2 a_1 \\ a_5 a_2 a_1 3 \\ \hline 27 \end{array}$$

$a_1 - 3 = 7 \Rightarrow a_1$

цифра $a_1 = 0$

$$\begin{array}{r} a_4 a_3 a_2 0 \\ a_2 0 \; 3 \\ \hline 2 \; 7 \end{array}$$

получается $a_2 = 3$

$$\begin{array}{r} a_4 a_3 3 0 \\ a_3 3 0 3 \\ \hline 2 7 \end{array}$$

~~значит~~ раз $a_3 - 3 = 0 \Rightarrow a_3 = 3$

Заметим, что $a_4 - a_3 = 0 \Rightarrow a_4 = a_3 = 3$

Получается ~~a_1, a_2, a_3~~

$a_1, a_2, a_3 \dots a_n = 3$

$A = \underbrace{333 \dots 3}_{n}03$

Есть условие, что $A \vdots 99 \Rightarrow A \vdots 11 \Rightarrow$ сумма цифр на чётных местах ~~равна~~ сумма цифр на нечётных должна быть кратна 11

допустим в A чётное кол-во цифр пусть кол-во цифр $2k$ ~~чётных~~ ~~$2k$~~ сумма нечётных $3 \cdot k$, а на чётных $3(k-1)$

тогда число $A \not\vdots 11$

пусть в A нечётное кол-во цифр $3\underbrace{33}\underbrace{33} \dots 03$

кол-во цифр $2k+1$

на нечет: $3(k+1)$ тоже число ~~A~~ $A \not\vdots 11$

на чет: $3(k-1)$

Ответ: таких чисел нет

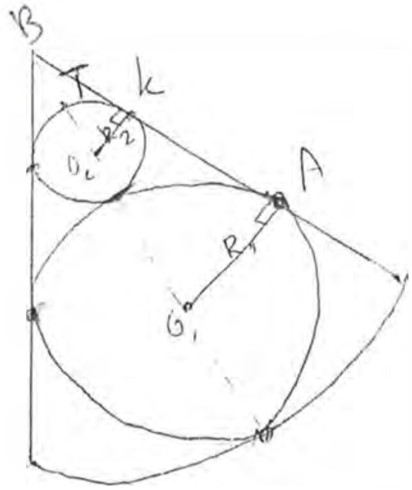
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17 111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ IL98-58

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4



Надо найти max $\frac{R_1+R_2}{R}$

это происходит при

$R\sin\frac{\alpha}{2} - R_1\sin\frac{\alpha}{2} = R_1$

$R\sin\frac{\alpha}{2} = R_1(1+\sin\frac{\alpha}{2})$

$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{R_1}{R}$

$\triangle BO_1A$ прям.

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O_1A}{BO_1} = \frac{R_1}{R-R_1}$ ↗

$\triangle BO_2k$: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{O_2k}{BO_2} = \frac{R_2}{R-2R_1-R_2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot R - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2R_1 - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot R_2 = R_2$

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot R - \sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot R = R_2(1+\frac{\sin\alpha}{2})$

$R\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = R_2\left(1+\frac{\sin\alpha}{2}\right)$

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Задание 4 (Часть 2)

$$\frac{R_2}{R} + \frac{R_1}{R} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} + \sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

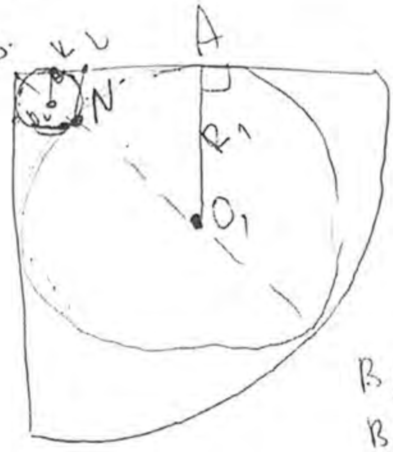
$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right)}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right)}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} : \frac{1}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}$$

при $a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ $2\sin\frac{\alpha}{2}$ максим при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} =$

$\alpha = 90^\circ$



$AO_1 = \frac{R}{2}$

$BO_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ не соот.

$BN = \frac{\sqrt{2}}{2}R - R_1 =$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}R - \frac{1}{2}R = R\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

$BN^2 = BL^2 + LN^2$

$BN^2 = 2BL^2$

$R^2\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = 2 \cdot R_2^2$

$R_2 = \frac{R \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\sqrt{2}}$

±

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задание 4 (Часть 3)

$$\frac{R_1+R_2}{R} =$$

$$R_1+R_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot R + \frac{R\,\frac{\sqrt{2}-1}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_1+R_2}{R} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{R_1+R_2}{R} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{R_1+R_2}{R} = \frac{2-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

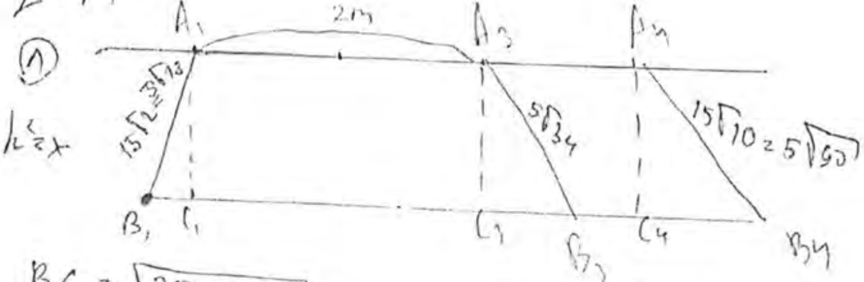
Задание 2

Допустим $A \parallel B$

пусть $q > m$

①

пусть $A_1C_1^2 = h^2 = x$



$B_1C_1 = \sqrt{25\cdot 18 - x}$ огр $x \le 25\cdot 18$

$B_3C_3 = \sqrt{25\cdot 34 - x}$

$C_4B_4 = \sqrt{25\cdot 50 - x}$

$$\begin{cases} B_1B_3 = 2q = \sqrt{25\cdot 18 - x} + 2m + \sqrt{25\cdot 34 - x} \\ B_1B_4 = 3q = \sqrt{25\cdot 18 - x} + 3m + \sqrt{25\cdot 50 - x} \end{cases}$$

② случай

$$\begin{cases} 2q = -\sqrt{25\cdot 18 - x} + 2m + \sqrt{25\cdot 34 - x} \\ 3q = -\sqrt{25\cdot 18 - x} + 3m + \sqrt{25\cdot 50 - x} \end{cases}$$

Попробуем решить начале первой систему

$$3\sqrt{25\cdot 18 - x} + 6m + 3\sqrt{25\cdot 34 - x} = 2\sqrt{25\cdot 18 - x} + 6m + 2\sqrt{25\cdot 50 - x}$$

$$\sqrt{25\cdot 18 - x} + 3\sqrt{25\cdot 34 - x} = 2\sqrt{25\cdot 50 - x}$$

$$25\cdot 18 - x + 2\cdot 3\sqrt{25\cdot 18 - x}\cdot\sqrt{25\cdot 34 - x} = 4\cdot 25\cdot 50 - 4x$$

задание 2 (часть 2)

$6\sqrt{25\cdot25\cdot18\cdot34-25\cdot18\cdot x-25\cdot34\cdot x+x^2}=500-4x-25\cdot18+x$

$6\sqrt{25\cdot25\cdot18\cdot34-25x(18+34)+x^2}=500-3x-25\cdot18$

$2\sqrt{25\cdot25\cdot18\cdot34-25x\cdot52+x^2}=\underbrace{300-25\cdot6}_{150}-3x$ | $:6$

$4(25\cdot25\cdot18\cdot34-25\cdot52\cdot x+x^2)=150^2-2\cdot150\cdot3x+9x^2$

$100\cdot25\cdot18\cdot34-100\cdot52x+4x^2=150^2-900x+9x^2$

$5x^2-900x+520x+150^2-100\cdot25\cdot18\cdot34=0$

$5x^2-380x+25\cdot25\cdot6\cdot6-25\cdot25\cdot4\cdot3\cdot6\cdot34=0$

$5x^2-380x+25\cdot25\cdot6\cdot3(3-4\cdot34)=0$

$x^2-76x+5\cdot25\cdot18\cdot(-133)=0$

$x^2-76x-5\cdot25\cdot18\cdot133=0$

$D=76^2+4\cdot5\cdot25\cdot18\cdot133=76^2+500\cdot18\cdot133$

$x=\dfrac{76+\sqrt{\cancel{500}\,76^2+500\cdot18\cdot133}}{2}$

$\mp$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

г. Чебоксары

Место проведения

TV33-96

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ Львов

ИМЯ Илья

ОТЧЕСТВО Андреевич

Дата рождения 15.02.2007

Класс: 10

Предмет Математика

Этап: Заключительный

Работа выполнена на 6 **листах**

Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

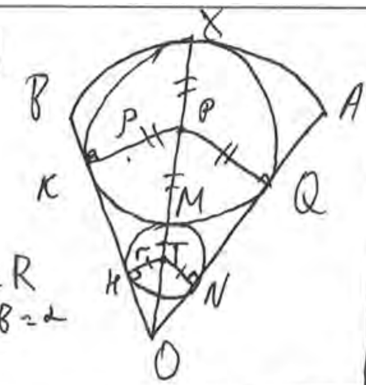
Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ TV33-96

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

2



$OA = R$
$\angle AOB = 2\alpha$

$r/R = \max?$

Пусть $KP = \rho$ - радиус большой окр-ти.
Тогда $OP = R - \rho$;

См. далее.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ TU33-96

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$OP = \frac{PQ}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $R - \rho = \frac{\rho}{\sin\alpha/2}$;

$R = \rho\left(\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + 1\right)$; $\rho = \frac{R}{1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

$OM = OX - \cancel{X}M = R - 2\rho = R\left(1 - \frac{2}{1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}\right)$

$OT = OM - MT = OM - r = R\left(1 - \frac{2}{1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}\right) - r =$

$= \frac{TN}{\sin\alpha/2} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = R\left(1 - \frac{2}{1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}\right) - r$;

$r\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) = R\left(1 - \frac{2}{1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}\right)$

$\frac{r}{R} = \frac{1 - \frac{2}{1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}}{1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1}{\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2} =$

±

$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+1\right)^2} = \frac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{\underbrace{\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}}_{\geq 2 \text{ по Н-ву Коши}} + 2}$

Пусть $\sin\frac{\alpha}{2} = t$;

$\frac{t(1-t)}{(t+1)^2} = a$; $at^2 + 2at + a = t - t^2$;

$(a+1)t^2 + (2a-1)t + a = 0$; $D \geq 0$; $4a^2 - 4a + 1 - 4a^2 - 4a \geq 0$

$-8a + 1 \geq 0$; $\boxed{a \leq \frac{1}{8}}$ $\boxed{t = \frac{1-2a}{2a+2} = \frac{3/4}{9/4} = \frac{1}{3}}$

Тогда при $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$ достигается макс значение $\frac{r}{R} = \frac{1}{8}$

$\alpha = 2\arcsin\frac{1}{3}$; отношение равно $1/8$.

Ответ: $\frac{1}{8}$ - наибольшее значение при $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{3}$

(4) А) Предположим, что $x_0 < 0$ – корень многочлена.
Если $a_n < 0$, то $a_n x^n > 0$ т.к. n – нечетно и $x < 0$ и $a_n < 0$.
$a_{n-1} \cdot x^{n-1} > 0$ т.к. знаменатель прогрессии отрицателен, то если $a_n < 0$ то $a_{n-1} > 0$; ну а n – нечетное, то $n-1$ – чет $x^{n-1} > 0$.
И так далее до $a_0 > 0$. Итак мы имеем сумму строго положительных чисел
$P_n(x_0) > 0$; $P_n(x_0) = \underbrace{a_n x_0^n}_{>0} + \underbrace{a_{n-1} x_0^{n-1}}_{>0} + \ldots + \underbrace{a_0}_{>0}$
– невозможно. Значит наше предположение неверно и $a_n > 0$.
Но тогда $a_n x^n < 0$ (n – неч; $x < 0$; $a_n > 0$)
$a_{n-1} x^{n-1} < 0$ ($n-1$ – чет; x^{n-1} – четное); $a_{n-1} < 0$
И так далее до $a_0 < 0$
Имеем $P_n(x_0) = \underbrace{a_n x_0^n}_{<0} + \underbrace{a_{n-1} x_0^{n-1}}_{<0} + \ldots + \underbrace{a_0}_{<0} = 0$
Сумма строго отрицательных чисел равна нулю – противоречие.
Таким образом получили, что $a_n \not< 0$ и $a_n \not> 0$ – невозможно. Значит первоначальное допущение неверно и $x \not< 0$

б) При подстановке в уравнение $x = -q$ ЧТД.
Получаем верное равенство
Если $a_n = b$; $a_{n-1} = bq$; $a_{n-2} = bq^2 \ldots$ имеем
$P_n(-q) = b(-q)^n + bq(-q)^{n-1} + \ldots + bq^{n-1}(-q) + bq^n =$
$= -bq^n + bq^n - bq^n + bq^n - \ldots - bq^n + bq^n = 0$
То есть $\boxed{x = -q}$ Докажем, что других корней нет.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Если $x=-q$ - корень $P_n(x)$ то $P_n(x)$ делится на многочлен $x+q$ без остатка по теореме Безу.
Составим схему Горнера для $P_n(x)$ и корня $x=-q$

$$\begin{array}{cccccc} & b & bq & bq^2 \;\ldots & bq^{n-2} & bq^{n-1} \\ -q & b & bq-bq=0 & bq^2 \;\ldots & bq^{n-1}-bq^{n-2}=0 & bq^{n-1} \end{array}$$

То есть имеем после деления многочлен вида
$$bx^{n-1}+bq^2x^{n-3}+bq^4x^{n-5}+\ldots+bq^{n-1}=0$$
Т.к. n - нечетно то x^{n-1} - четная степень; $n-3$ - четная степень и т.д.:
~~х~~ $x^{n-1}; x^{n-3} \ldots \geq 0$ (четные степени)
При этом коэффициенты $b; bq^2; bq^4 \ldots$ все либо строго больше, либо строго меньше нуля ($q^2; q^0; q^4; q^6 \ldots q^{n-1}>0$;)

Значит имеем многочлен состоящий из одночленов, каждый по отдельности у которых либо строго больше либо строго меньше нуля (т.к. $x=0$ не является решением мы можем говорить о строгости знаков)
Сумма положительных чисел не может равняться нулю, ровно как и сумма отрицательных чисел ⟹ Других корней нет.

Ответ: $x=-q$; максимальное число корней — 1 корень.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

(5) Поездка не устроит, если между днями еды будет ровно 3 дня (в неделе 7 дней, 4 для еды).
Рассмотрим все случаи когда между едой будет три дня.

С С С _ _ _ С   С С _ _ _ С С

С _ _ _ С С С – все возможные варианты.

Число способов выбрать 4 дня из 7 равно

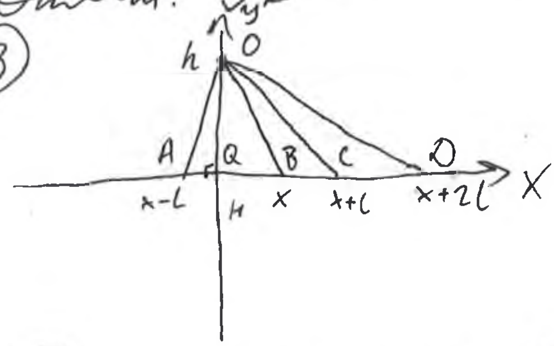
$C_7^4 = \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{3\cdot 2} = 35$ способов.

Число неудовлетворяющих способов – 3.

Тогда всего доступных способов $35 - 3 = 32$.

Ответ: 32 способа

(3)



Перечертим условие в следующем виде
A – 1 станция B – 2 вторая;
C – 3 станция; D – 4.
O – центральный пост

Тогда по теореме Пифагора (см. рис).

$$\begin{cases} (x-l)^2 + h^2 = 72 = AO^2 = (6\sqrt{2})^2 & \text{для } \triangle AOQ \\ (x+l)^2 + h^2 = 136 = OC^2 = (2\sqrt{34})^2 & \text{для } \triangle OCQ \\ (x+2l)^2 + h^2 = 360 = (6\sqrt{10})^2 = OD^2 & \text{для } \triangle ODQ \end{cases}$$

$(x+l)^2 - (x-l)^2 = 64$

$lx = \frac{64}{4} = 16.$

$(x+2l)^2 - (x+l)^2 = 224;$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ TV 33-96

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$$\begin{cases} l(2x+3l)=224 \\ lx=16; \end{cases} \quad l=\frac{16}{x};$$

$$\frac{16}{x}\left(2x+\frac{48}{x}\right)=224;$$

$$32x+\frac{16\cdot 48}{x}=224x;$$

$$2lx+3l^2=224;$$

$$l=\sqrt{\frac{224-2lx}{3}}=\sqrt{\frac{224-32}{3}}=\sqrt{64}=8$$

= m – искомое $\boxed{m=8}$ $x=\frac{16}{8}=2.$

Расстояние от поста до линии равно h

$$(x-l)^2+h^2=72$$

$$6^2+h^2=72;\ h^2=36;\ \boxed{h=6}$$

Точка ближайшая к центральному посту на линии – точка Q – основание высоты OQ. Тогда искомое расстояние $AQ=\sqrt{AO^2-OQ^2}$ (по теореме Пифагора для $\triangle AOQ$) $=\sqrt{72-h^2}=\sqrt{72-36}=6$

Ответ: На расст. 6 км находится точка ближайшая к центр. посту (считая от 1 станции); расстояние от поста до линии 6 км; m = 8 км

+

Лист 06 из 06

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

№ группы	Место проведения
M7F01	Дистанционно, с использованием ВКС

шифр: BR13-18

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17171

ФАМИЛИЯ Маевский

ИМЯ Александр

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 23.11.2009 Класс: 7

Предмет Математика Этап: Заключительный

Работа выполнена на 5 листах Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Мая

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

BR13-18

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 1

a – 4 чёрных
в – 4 рыжих
c – 4 фиолетовых

Если на вертеле 3 шары, то получаем трёхзначное число $\overline{abc}_3$ (в троичной системе a, в, c)

Тогда количество комбинаций:
$3^3 = 27$

Из них вычитаем 3 (комбинации $\overline{aaa}$, $\overline{bbb}$, $\overline{ccc}$)

$27 - 3 = 24$.

Ответ: 24 способами.

–

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ BR13-18

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2

$A = \overline{1bc}$, $B = \overline{bc1}$

$\frac{B}{A} = n$, где n – натуральное число

$A = 100 + 10b + c = 10b + c + 100$

$B = 100b + 10c + 1$

$\frac{B}{A} = \frac{100b + 10c + 1}{10b + c + 100} = 10 - \frac{999}{10b + c + 100} = n$

если $B > A$, то $n > 1$

$\Rightarrow \frac{999}{10b + c + 100} \in$ от 1 до 8 включительно (натуральные числа)

$$\begin{array}{r|l} 999 & 3 \\ 333 & 3 \\ 111 & 3 \\ 37 & 1 \end{array} \Rightarrow 999 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 1$$

Нам подходит по условию задачи:

$999 = 1 \cdot 999$ или $999 = 3 \cdot 333$

$\Rightarrow 10b + c + 100 = 999$ или $10b + c + 100 = 333$

$10b + c = 899$ $\qquad$ $10b + c = 233$

учитывая, что b и c – однозначные числа, то

$10b = 890$, $c = 9$ или $10b = 230$, $c = 3$

$b = 89$ $\qquad$ $b = 23$

– не подходит по условию задачи, значит решений нет

Ответ: таких чисел нет.

+

BR13-18

Лист 03 из 05

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№ 3

n – количество заправок
V – объём бака
0,75 V – расход последнего бака

S – расстояние
$\frac{V \cdot n}{S}$ – "идеальное" измерение
погрешность ≤ 1%

Тогда:

$$\frac{V\cdot(n-1)+V\cdot 0{,}75}{S} : \frac{V\cdot n}{S} \geqslant 0{,}99$$

$$\frac{V\cdot(n-1)+0{,}75\cdot V}{S} \cdot \frac{S}{V\cdot n} \geqslant 0{,}99$$

$$\frac{n-1+0{,}75}{n} \geqslant 0{,}99$$

$$n-1+0{,}75 \geqslant 0{,}99\cdot n$$

$$n\cdot(1-0{,}99) \geqslant 1-0{,}75$$

$$n \geqslant \frac{1-0{,}75}{1-0{,}99}$$ ← доля расхода последнего бака; ← точность измерения

$n \geqslant 25$.

Ответ: Нужно заправиться не менее, чем 25 раз. От единиц измерения прожорливости ответ не изменится (т.к. зависит только от доли расхода последнего бака и точности измерения).

+

№5.

1. Убираем артистов, которые не могут по условиям задачи работать друг с другом (убираем Скапкина, Ляпкина) - совсем не подходят
2. Составляем комбинации из оставшихся артистов по условиям задачи методом перебора и получаем:

Ответ: Главная роль: Тяпкин
Второстепенная роль: Шапкин
Эпизодическая роль: Жабкин

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

	ДИСТАНЦИОННО, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВКС
№ группы	Место проведения

ТК35-24

шифр

← Не заполнять
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17991

ФАМИЛИЯ МАЛЬЦЕВ

ИМЯ АЛЕКСЕЙ

ОТЧЕСТВО ЕВГЕНЬЕВИЧ

Дата рождения 23.05.2008 Класс: 9

Предмет МАТЕМАТИКА Этап: ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 7 листах Дата выполнения работы: 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

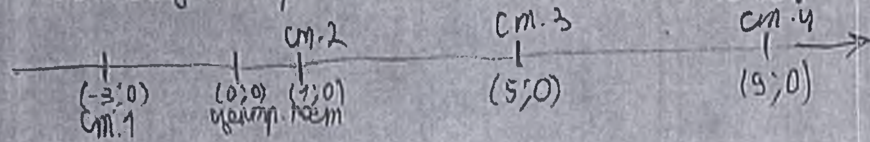
ТК35-24

Вариант: 17991 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ТК35-24

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Да, может. Например, если обслуживающие подстанции располагаются так:



В таком случае $m=4$, т.е. ~~расстояние~~ от ~~центра~~ до ст.2 = расстояние от центра до ~~ст.1 =~~

координата ст.2 = координата пос. ст.3 − m $= 5-4=1$

⇓

расстояние от центра до ст.2 $= 1-0=1$.

Ответ: Да, расстояние = 1км. +

№2

Представим проныр в виде 10 шаров и поставим между ними 3 перегородки (от начала до самой левой – то, сколько проныр в 1 куске сыра, от 1 до 2 – сколько во 2 куске, от 2 до 3 – сколько в 3 куске, от 3 до конца – сколько в 4 куске.)

Также поймём, что 2 условие („в одном из кусков – не менее двух") выполняется всегда. Предположим, что это не так. Тогда в каждом куске сыра ≤ 1 проныры, т.е. всего их ≤ 4, а по условию их 10. Противоречие. +

Теперь посчитаем число способов поставить перегородки:

1) Т.к. в каждом куске ≥1 проныра, то до первого и после последнего шара мы перегородки ставить не можем, т.е. мест для перегородок всего 9 (в каждом промежутке между шарами)

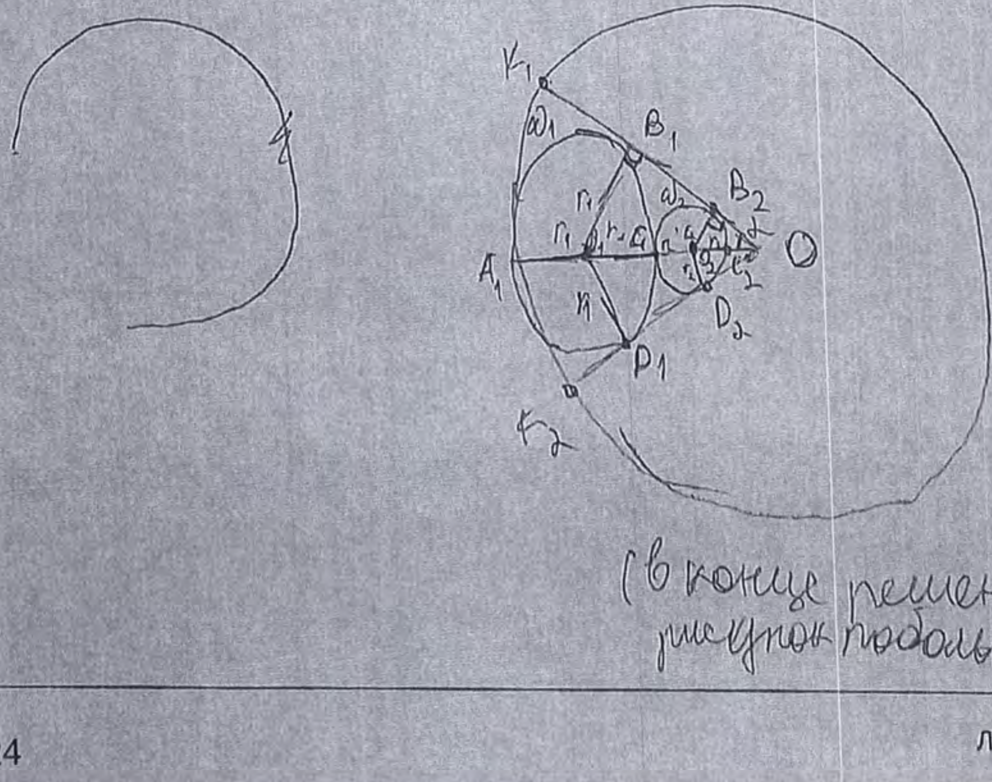
2) Т.к. в каждом куске ≥1 проныра, то две перегородки в одно место мы тоже поставить не можем.

Т.о. первую перегородку у нас есть 9 сп-бов поставить, вторую – 8, третью – 7, но т.к. их порядок нам не важен, то искомый ответ – $\frac{9\cdot 8\cdot 7}{3!}=$

$=\frac{504}{6}=84$

Ответ: 84.

№3



(в конце решения есть рисунок побольше

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Поймём, что OK_1 и OK_2 - касательные к окружностям ω_1 и ω_2

Тогда $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1 = O_1D_1 = r_1$ (как радиусы одной окружности)

и при этом $O_1B_1 \perp OK_1$ и $O_1D_1 \perp OK_2$ (т.к. B_1 и D_1 - точки касания.)

аналогично $r_2 = O_2C_1 = O_2B_2 = O_2C_2 = O_2D_2$ и $O_2B_2 \perp OK_1$

$OD_2 \perp OK_2$

$$OO_1 = OA_1 - O_1A_1 = R - r_1$$

$$O_1D_1 = OO_1 \cdot \sin\alpha = r_1$$

$$(R - r_1)\sin\alpha = r_1$$

$$R\sin\alpha - r_1\sin\alpha = r_1$$

$$R\sin\alpha = r_1(1+\sin\alpha)$$

$$r_1 = \frac{R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$OO_2 = OA_1 - O_2A_1 = R - (2r_1 + r_2) = R - 2r_1 - r_2$$

$$O_2D_2 = OO_2 \cdot \sin\alpha$$

$$r_2 = (R - 2r_1 - r_2)\sin\alpha$$

$$r_2 = R\sin\alpha - 2r_1\sin\alpha - r_2\sin\alpha$$

$$r_2(1+\sin\alpha) = R\sin\alpha - 2r_1\sin\alpha$$

$$r_2(1+\sin\alpha) = \sin\alpha(R - 2r_1)$$

$$r_2(1+\sin\alpha)=\sin\alpha\left(R-\frac{2R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

$$r_2(1+\sin\alpha)=\sin\alpha\left(\frac{R+R\sin\alpha-2R\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)$$

$$r_2(1+\sin\alpha)=\frac{R\sin\alpha-R\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}$$

$$r_2=\frac{R\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2}$$

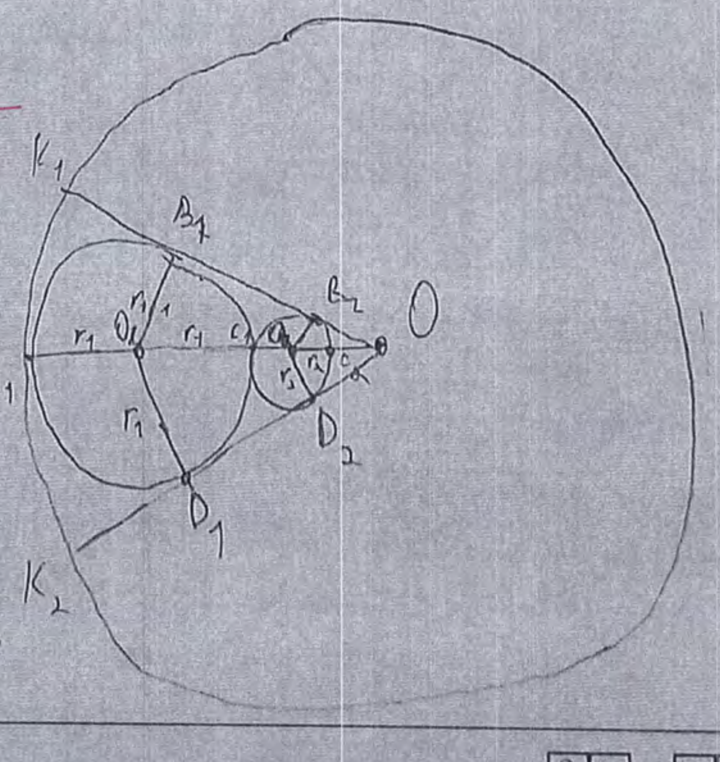
$$\frac{r_2}{R}=\frac{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}{(1+\sin\alpha)^2}=\frac{(0{,}5-(0{,}5-\sin\alpha))(0{,}5+(0{,}5-\sin\alpha))}{(1+\sin\alpha)^2}$$

$$=\frac{0{,}5^2-(0{,}5-\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)^2}$$

max для этой ф-ции тогда, когда $0{,}5=\sin\alpha$, в этом случае $\frac{r_2}{R}=\frac{0{,}25}{1{,}5^2}=\frac{0{,}25}{2{,}25}=\frac{1}{9}$

Ответ: $\frac{r_2}{R}=\frac{1}{9}$

неверно



(−)

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

Заметим, что если за k обозначить отношение чисел (большее к меньшему), то $k \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

$k \neq 1$, т.к. получим число, больше исходного и $k < 10$, т.к. число было 6-значным и осталось 6-значным.

Также поймём что $k \neq 2; 4; 6; 8$, т.к. получившееся число нечётно (оканчивается на 1) и $k \neq 5$, т.к. числа $\vdots 5$ оканчиваются только на 5 и 0, не на 1.

$\Updownarrow$

$k \in \{3; 7; 9\}$.

Заметим, что все эти числа нечётные, и если любое из k умножить на $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, то мы получим числа с разными остатками на 10.

Т.о. по получившейся цифре мы можем однозначно восстановить ту цифру, которую мы умножали.

Например чтобы получить 1 умножением на 3 нужно число 7, ~~…~~, т.е. последняя цифра изначального и предпоследняя для получившегося - 7. Был перенос из предыдущего разряда в раз-

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17591

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ ⇨ ТК35-24

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

мере 2, т.е. $3\cdot a+2 \equiv_{10} 7$ Очевидно, что $a=5$ и т.д.

Т.о. при $k=3$ удастся восстановить исходное число $=142857$ (и действительно, $3\times142857=$ $=428571$)

для $k=7$ исходное $=133333$, но $7\times133333\neq$ $\neq333331$

для $k=9$ исходное $=199999$, но $9\times199999\neq$ $\neq999991$.

Т.о. исходное максимальное число $=142857$

−

№5

Перепишем это уравнение согласно перечисленным условиям:

$ax^3+2024ax^2+2024^2ax+2024^3a=0$

$ax^2(x+2024)+2024^2a(x+2024)=0$

$(ax^2+2024^2a)(x+2024)=0$

$a(x^2+2024^2)(x+2024)=0$

Три случая:

1) $a=0$

2) $x^2+2024^2=0$

3) $x+2024$

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

1 случай невозможен по условию

2 случай:

$x^2+2024^2=0$

$x^2=-2024^2$

$\forall x \in R\ \varnothing$

$\cancel{\forall}$ для $x \notin R$ $x=\pm 2024 \cdot i$

3 случай:

$x+2024=0$

$x=-2024$

Ответ: $\cancel{\forall}$ для $x \in R$: $x=-2024$

для $x \notin R$: $x=-2024$; $\pm 2024i$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

P7F01	Дистанционно с использованием ВКС
№ группы	Место проведения

TH54-55

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17661

ФАМИЛИЯ Малютин

ИМЯ Максим

ОТЧЕСТВО Дмитриевич

Дата рождения 29.04.2011 **Класс:** 6

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

TH54-55

N1

Давайте начитем таблицу ниже и имена актёров сократим до 3-4 букв, а главную роль сократим до Г, второго плана – В, эпизод – Э:

АКТЁР	ЕГО УСЛОВИЯ	участвует
ЛЯП	если Г – ЖАБ	✓
ШАП	чаще ТАП	×
ШАП	если снимается ОХАП	×
ТАП	если Г – ОХАП	×
ТАП	если Э – ШАП	×
ТАП	снимаются ЖАБ и ОХАП	×
ТРЯП	РЕЖЕ ТАП или ЖАБ	×
ЖАБ	ЖАБ – В	×
ЖАБ	если Г или В – ТРЯП	×
ЖАБ	ЛЯП, если Г или В не ОХ	×
ОХАП	если Г – он или ТАП	✓

(участвует при этом условии или нет)
(если снимается ОХАП)
(если снимаются и ЖАБ и ОХАП)
(если Г или В – ТРЯП, то Э – он не будет)
(если Г или В не ОХАП, то он не будет с ЛЯП)

ЖАБ не может быть главным, потому что, если он главный, то ЛЯП будет, но тогда В – будет ОХАП (по условию), но ОХАП не будет, если Г – не он или ТАП. Противоречие.
ЛЯП тоже не может быть Г, потому что он не будет участвовать, если Г – не ЖАБ.
Пусть Г – ШАП, тогда не снимается ОХАП и ТАП, если ТАП будет, то ШАП не будет. ЛЯП не будет, потому что, ЖАБ – не глав. Остались ЖАБ и ТРЯП, но если ТРЯП – В, то ЖАБ не снимается, а если ЖАБ – В, А ТРЯП – Э, то ТРЯП не снимается. Значит ШАП не может быть Г.
Пусть ТРЯП – Г, тогда ЖАБ не снимается и ОХАП. ЛЯП, тоже, потому что ЖАБ не Г. Остались ТАП и ШАП. ТАП не будет В, потому что тогда ШАП – Э. (см. продолжение)

N1 (продолжение)

Пусть тогда ТАП - Э, тогда ШАП - В, не соответствует условию. Значит ТРЯП - не Г.

Пусть ОХАП - Г, тогда ШАП, ТАП и ЛЯП не снимаются. Остались ТРЯП и ЖАБ. ТРЯП не может быть Э, потому что он будет ~~реж~~ реже сниматься, чем ЖАБ. А ЖАБ не будет сниматься, если ТРЯП - В. Значит ОХАП - не Г.

Раз не ОХАП, не ТРЯП, ни ШАП, ни ЛЯП, ~~ни~~ ЖАБ - НЕ Г, то Г - ТАП.

+

Если Г - ТАП, то ЛЯП и ТРЯП не снимаются. ОХАП пусть будет второй, тогда ШАП не снимается, и ЖАБ - Э. Все условия соблюдены. Значит Г - ТАП, ОХАП - В, ЖАБ - Э.

Тапкин не подходит, если Хабкин и Охапкин (из усл)

Ответ: Главный герой - Тапкин.
Второй план - Охапкин.
Эпизодическая - Жабкин.

N2

Так как нам дали суммы, то мы можем узнать Л, в слове стол - есть л, а в сто нет, но все остальные буквы совпадают значит можно из стол вычесть сто и получим л.

23 - 17 = 6. Значит л - 6

Аналогично с мост и сто.

26 - 17 = 9. Значит м - 9

СОМ - М = СО

21 - 9 = 12

СТО - СО = Т

17 - 12 = 5. Значит Т - 5.

+

Все суммы 5: 1, 4, 0; 2, 3, 0.

№ 2 (продолжение)

Тогда с - либо 1, 2, 3, 4, 0

С О = 12

Значит с не 1, 2, 0. Так как цифры идут до 9 включительно, а не до 12.

Также с не 3, так как тогда О = 11, что противоречит условию, значит С = 4, а О = СО - С = 12-4 = 8

Значит молот = 98685

№ 4

а если иначе?

Так 14 и 15 были синие, то 16 и 17 могут быть зелёными, а 18, 19 синие и т.д., но в конце 26 будет синим и 27 будет зелёным, а не синим, и так как у нас во 2 кучке лежит зелёный и 27 ходом в первую мы положим зелёную, значит зелёную мы положить не можем, а значит 28 будет синея.

Или если 16 будет зелёная, а 17 синяя и т.д (18-з, 19-с), то получается 25-с, а 26 з, значит 27 - з (по условию), получаем, что и в I кучке и во II кучке зелёные значит 28 - синяя.

Ответ: синий.

№ 5

Пусть два таких участника не найдутся, тогда у всех различное кол-во рукопожатий. То есть делаем мин. и тогда у I = 0; II = 1 и т.д. XIX = 18. Но раз у XIX = 18, то он поздоровался со всеми, а значит у I = 1. получили противоречие.

№5 (продолжение)

Ответ: доказано в решении.

+

№3

Это задача граф, то есть в графе все точки связаны попарно, значит количество всех проведённых линий должно делиться на 2. У нас всего 17 голов, то есть коров, это считай точки, значит из каждой точки выходит по 7 линий (так как каждая дружит с 7 другими), значит всего 17 · 7 = 119 линий, но 119 не делится на 2, а значит это невозможно. (119 нацело на 2 не делится)

+

Ответ: права, доказано в решении.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

ВФ МЭИ	ТХ84-26	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17551

ФАМИЛИЯ Мартынова

ИМЯ Варвара

ОТЧЕСТВО Алексеевна

Дата рождения 13.06.2012. **Класс:** 5

Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Мlly.

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№2. Решение:

Я выяснила, что максимально делить каждую горстку можно $x-1$ раз, где x – количество зёрнышек в горстке.

Значит всего можно разделить горсточки $(5-1)+(7-1)+(10-1)+(14-1)+(16-1)=4+6+9+13+15=47$ раз. Петя (тот, кто ходит первым) выигрывает когда разделить можно чётное количество раз, а Гриша (тот, кто ходит вторым) выигрывает когда разделить можно нечётное количество раз. Так как 47 нечётное число, то выиграет Гриша.

Ответ: Гриша, Ответ на вопрос "Почему?" приведён выше.

+

№3 Решение:

~~Пусть эльф поймал x бабочек, а фея у. Тогда каждая команда поймала $4x$ или $4y$ бабочек (потому что~~

В любом случае в каждой команде или эльф, или фея поймал в 3 раза больше чем напарник. Обозначим количество бабочек, пойманных напарником (тем кто поймал меньше) за x, причём в разных командах x может принимать разное значение. Тогда количество бабочек в каждой команде $= x+3x=4x$. Тогда количество бабочек пойманных всего $= \underbrace{4x+4x+4x+\ldots+4x}_{n \text{ раз}} = 4x\cdot n = 4xn$. Отсюда получаем, что число бабочек, пойманных всеми командами должно быть кратно 4. Так как число 2025 не кратно 4, ответ нет.

Ответ: нет.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4. Решение:

Чтобы не было противоречий, выбираем, что у Хрюкозанца правдиво высказывание "Мармагулец дрессирует животных". Отсюда получаем, что у Мармагульца правдиво второе высказывание, и Коломак не танцует. Также из высказывания Хрюкозанца понятно, что он не поёт. Отсюда получаем, что второе высказывание Коломака лживо, а правдиво высказывание "Я рисую". Отсюда получаем, что первое высказывание Землянина лживо, а его высказывание "Чупабряк пишет стихи" правдиво. Соответственно второе высказывание Чупабряка лживо, а первое его высказывание "Поёт Землянин" правдиво. Остаются только танцы, ими занимается Хрюкозанец.

Итак получаем:

Коломак: рисует

Чупабряк: пишет стихи

Землянин: поёт

Хрюкозанец: танцует

Мармагулец: дрессирует животных.

Ответ: Коломак - рисует; Чупабряк - пишет стихи; Землянин - поёт; Хрюкозанец - танцует; Мармагулец - дрессирует животных

+

№5. Получить из трёх цифр в сумме 5 можно двумя (разных цифр) способами: 1) 0+2+3

2) 0+1+4

Сумму 21 из трёх разных цифр можно получить тремя способами: 1) 9+8+4 3) 6+7+8

2) 9+7+5

Так как в словах ВЕС и СОМ одинаковая буква "С", то и в суммах должна быть одна одинаковая цифра.

+

Это суммы "0+1+4" и "9+8+4". И соответственно "С"=4.
На каком месте в слове ВЕС стоят цифры 0 и 1 значения не имеет так как букв "В" и "Е" нет в слове МОЛОТ.
В словах СОМ и МОСТ 3 одинаковые буквы. Значит, чтобы найти букву "Т" нужно из МОСТ вычесть СОМ = 26 - 21 = 5. Значит Т=5. В слове СТО нам известны только две буквы "С" и "Т". = 17-(4+5)=8. Значит чтобы найти "О" нужно из СТО вычесть "С" и "Т" "О"=8. Отсюда получаем, что М = 9, т.к. ранее в слове СОМ нам было неизвестно расположение цифр 8 и 9, а сейчас мы знаем, что "О"=8, значит "М"=9. В слове "СТОЛ" нам известны 3 буквы из 4. Чтобы найти неизвестную "Л" надо из СТОЛ вычесть "С", "Т" и "О" = 23-(4+5+8) = 6. Значит "Л" = 6.
Тогда "МОЛОТ" = 98685.

Ответ: 98685.

№1. Предположим что таких чисел не найдется. Тогда надо найти 7 различных чисел, которые в сумме дают 29.
И вся проблема в том, что такие числа мы найти СМОЖЕМ а для доказательства мы их должны не смочь найти
Например:
0+2+3+4+5+6+9=29

Значит ошибка в условии задачи и доказать НЕВОЗМОЖНО

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

МЭИ	CG73-21	← Не заполнять Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 14557

ФАМИЛИЯ Медведев

ИМЯ Всеволод

ОТЧЕСТВО Ильич

Дата рождения 28.10.2012. **Класс:** 5

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 3 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Медведев

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№1

Допустим, что гномы получили наград так:

$1_г - 1_н$
$2_г - 2_н$
$3_г - 3_н$
$4_г - 4_н$
$5_г - 5_н$
$6_г - 6_н$
$7_г - 7_н$

} в сумме 28 наград, но их же 29. Если 7 получит еще 1, то мы получим контр пример где все условия соблюдены, но у всех розное кол-во наград

+

№2

Сначала сложим кол-во семян: 5+7+20+4+16 = 52

+

А поскольку они ходят по очереди, а всего четное кол-во семян то победит Гриша

Ответ: Гриша.

№3

1 команда = x+3x

? команд = 2025 = 4·x·y

Поскольку 2025 не делится на 4, то это не возможно. Ответ: нет

+

№5

Т.к. СОМ = 21, а МОСТ-20, то Т = 5,
СТО-17, МОСТ-20, то М = 9
СТОЛ-23, СТО-17, то Л = 6
ВЕС-5, то С-4 т.к. В-0, Е-1, иначе противоречие.
Значит МОЛОТ – 98685
Ответ: 98685.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17551

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ CG73-21

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№4

~~Нарисуем~~

Запишем высказывания:

1. К-рис., Х-пение
2. З-пение, М-танц
3. З-рис, И-стих.
4. Х-пение, М-дресс.
5. К-тан., И-дресс.

Нарисуем таблицу

	р.	п.	т.	с.	д.
К	✓	×	×	×	×
Х	×	×	✓	×	×
М	×	×	×	✓	×
З	×	✓	×	×	×
И	×	×	×	×	✓

р-рисует

п-поет

т.-танцует

с.-стихи

д-дрессир.

Ответ: К-рисует, Х-танцует, Ч-стихи, З-пение, И-дрессировка

Лист 2 из 3

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

№ группы	Место проведения
М11F01	ДИСТАНЦИОННО, С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВКС

ZA 56-66

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17111

ФАМИЛИЯ Мишин

ИМЯ Никита

ОТЧЕСТВО Сергеевич

Дата рождения 11.11.2006 **Класс:** 11

Предмет Математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Мишин

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ZA56-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№5

$P_n(x) = a_n x^n + a_n q x^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1} x + a_n q^n$

$a_n x^n + a_n q x^{n-1} + \ldots + a_n q^{n-1} x + a_n q^n = 0$

Так как $a_n \neq 0$ и $q \neq 0$, то

$\left(\frac{x}{q}\right)^n + \left(\frac{x}{q}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{x}{q} + 1 = 0$

$x = q$ не является корнем этого многочлена.

$\left(\frac{x}{q} - 1\right)\left(\left(\frac{x}{q}\right)^n + \left(\frac{x}{q}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{x}{q} + 1\right) = 0$

$\left(\frac{x}{q}\right)^{n+1} - 1 = 0$

$\left(\frac{x}{q}\right)^{n+1} = 1$

При чётном n:

$\frac{x}{q} = 1$

$x = q$ – не является корнем $P_n(x)$

При нечётном n:

$\frac{x}{q} = 1$ или $\frac{x}{q} = -1$

$x = -q$

Ответ: может;

Минимальная степень равна $n = 2025$;

$x = -q$.

+

№3

Число A не может содержать более трёх цифр. Пусть $A = 100a + 10b + 3$. Тогда

$(300 + 10a + b) - (100a + 10b + 3) = 27$

$297 - 90a - 9b = 27$

$90a + 9b = 270$

$10a + b = 30$

Значит, $A = 303$, но 303 не делится на 99. Мы получили противоречие, следовательно числа A, удовлетворяющего заданным условиям, не существует.

Ответ: не существует.

∓

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111 ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZA 56-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

№1

Количество способов выбрать из 10 дней 4 холодных равно C_{10}^4.

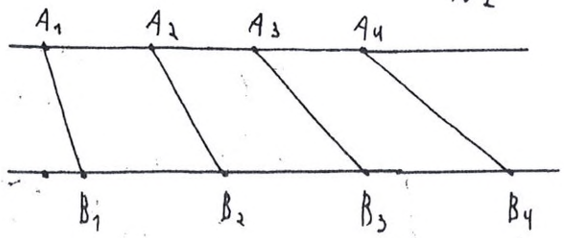
$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 3\cdot 10 = 210$

Количество способов выбрать дни так, чтобы хотя бы 3 из них шли подряд, равно

—

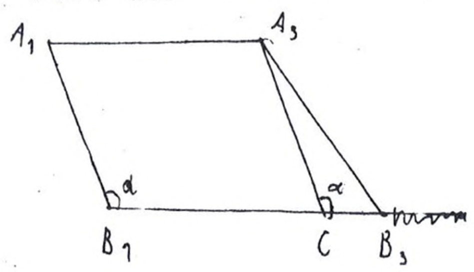
ZA56-66

№2



Предположим, что прямые параллельны. Пусть для определённости $q > m$ (равенство $q = m$ невозможно, так как отрезки A_kB_k не равны).

Рассмотрим трапецию $A_1A_3B_3B_1$



Пусть $A_3C \parallel A_1B_1$ и пусть $\angle A_1B_1B_3 = \alpha$. Тогда $\angle A_3CB_3 = \alpha$ (соответственные), а также $A_1A_3 = B_1C$, $A_1B_1 = A_3C$

По теореме косинусов для $\triangle A_3CB_3$,

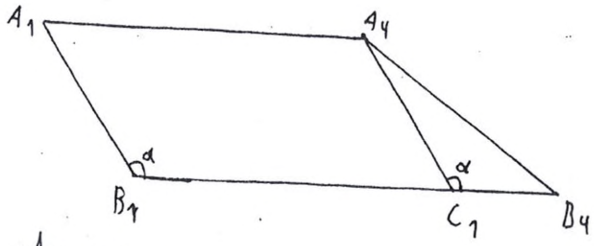
$A_3B_3^2 = A_3C^2 + CB_3^2 - 2\cdot A_3C\cdot CB_3\cos\alpha$

$25\cdot 34 = 450 + (2q-2m)^2 - 2\cdot 15\sqrt{2}\cdot(2q-2m)\cos\alpha$

$4(q-m)^2 - 60\sqrt{2}(q-m)\cos\alpha = 400$

$(q-m)^2 - 15\sqrt{2}(q-m)\cos\alpha = 100$ (1)

Рассмотрим трапецию $A_1A_4B_4B_1$



Аналогично,

$A_4B_4^2 = A_4C_1^2 + C_1B_4^2 - 2\cdot A_4C_1\cdot C_1B_4\cos\alpha$

$2250 = 450 + (3q-3m)^2 - 2\cdot 15\sqrt{2}\cdot(3q-3m)\cos\alpha$

$9(q-m)^2 - 90\sqrt{2}(q-m)\cos\alpha = 1800$

$(q-m)^2 - 10\sqrt{2}(q-m)\cos\alpha = \cancel{1800}\ 200$ (2)

Пусть $\{q - m = a,\ \cos\alpha = b$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - 15\sqrt{2}ab = 100 \\ a^2 - 10\sqrt{2}ab = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\sqrt{2}ab = 100 \\ a^2 - 10\sqrt{2}ab = 200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\sqrt{2}ab = 100 \\ a^2 = 400 \end{cases}$$

Так как $q > m$, то $a > 0$ и

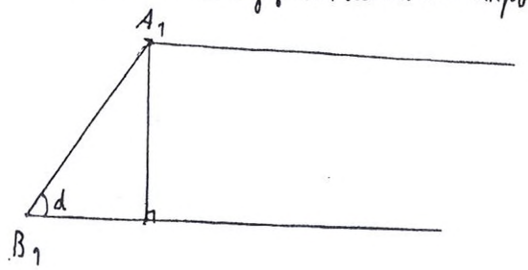
$$\begin{cases} a = 20 \\ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Таким образом,

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha = 45^0$

~~Расстояние между линиями электропередач равно~~

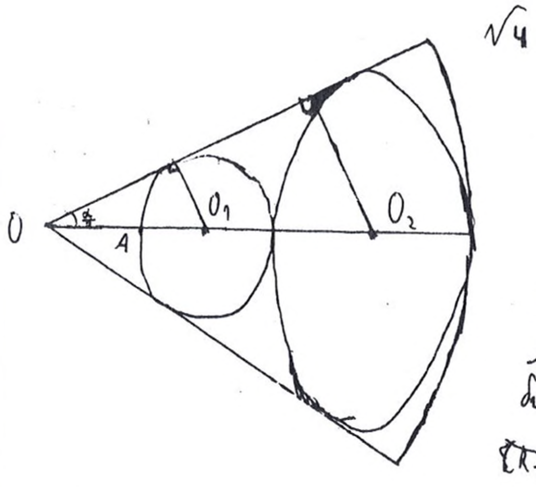


Расстояние между линиями электропередач равно

$h = A_1B_1 \sin\alpha = 15\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15.$

Ответ: 15,

√4



Пусть $OA = x$, а радиусы окружностей равны R_1 и R_2. Тогда

$R = x + 2R_1 + 2R_2$

Расстояние между центрами окружностей равно $R_1 + R_2$.

Линия центров вписанных окружностей является биссектрисой центрального угла, следовательно

~~$R_1 + x = R_1$~~ $R_1 = (R_1 + x)\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_2 = (R_2 + 2R_1 + x)\sin\frac{\alpha}{2}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17111

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ ZA 56-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$R_1 = R_1 \sin\frac{\alpha}{2} + x\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_1 = \dfrac{x\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\cancel{R_2 = R_2\sin\frac{\alpha}{2} + 2R_1\sin\frac{\alpha}{2} + x\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\cancel{R_2 = \dfrac{2R_1\sin\frac{\alpha}{2} + (R_1+x)\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}} = (R-2R_2)\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\sin\frac{\alpha}{2}}}$

$\cancel{R_2 = (2}$

$R_2 = (R-R_2)\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_2 = R\sin\frac{\alpha}{2} - R_2\sin\frac{\alpha}{2}$

$R_2 = \dfrac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}+1}$

Пусть $\sin\frac{\alpha}{2} = t$, $t \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

$\cancel{\dfrac{R_1+R_2}{R} = x}$

$R_1 + R_2 = \dfrac{xt}{1-t} + \dfrac{Rt}{1+t}$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

M5F01	VKS
№ группы	Место проведения

FK12-43

шифр

← **Не заполнять**
Заполняется ответственным работником

Вариант № 17551

ФАМИЛИЯ Морозова

ИМЯ Элина

ОТЧЕСТВО Станиславовна

Дата рождения 15.08.2012 **Класс:** 5

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 5 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Морозова

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

FK12-43

Задание №4

Рассмотрим два случая.

- если Колошмак не рисует
- если Колошмак рисует

Если не рисует:

составим таблицу

занятие / жители	Р.	По.	Т.	Пл.	Д.
К	–	–	+	–	–
Ч		–	–		
З		–	–		
Х	–	+	–	–	–
М			–		–

Если „К" не рисует, ставим минус, значит „Х" поёт (так сказал „К", это должно быть верно) Значит никто больше не поёт, он больше ничем не занимается. „Х" сказал, что он поёт это правда, значит он соврал, что „М" дрессирует. „М" солгал, что он дрессирует, значит правда, что „К" танцует. Он больше ничем не занимается, и никто больше не танцует. „Ч" соврал, что „З" танцует, но он ещё солгал, что он танцует.

Такого быть не может.

Значит „К" рисует.

Рассмотрим этот вариант. Составим таблицу:

Занятие / Житель	Р	По	Т	Пиш	Д
К	+	–	–	–	–
Ч	–	–	–	+	–
З	–	+	–	–	–
Х	–	–	+	–	+
М	–	–	–	–	

Если „К" рисует, значит никто больше не рисует, и он больше ничем не занимается. „З" солгал, что он рисует, значит правда, что „Ч" пишет стихи. Он больше ничем не занимается, и никто не пишет стихи. „Ч" солгал, что он танцует, значит правда, что „З" поёт. „З" больше ничем не занимается, и никто больше не поёт. „Х" солгал, что он поёт, значит правда, что „М" дрессирует животных. „М" ничем больше не занимается, и никто не больше не дрессирует. „М" солгал, что „К" танцует, зато правда, что он дрессировщик. Осталось только, что „Х" танцует.

+

Ответ: колошмак рисует, чувпабряк пишет стихи, землянин поёт, хрюкозанец танцует, лармагуец дрессирует животных.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №5.

Составим таблицу:

буквы \ цифры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	–	+	–	–	–	–	–	–	–	–
Е	+	–	–	–	–	–	–	–	–	–
С	–	–	–	–	+	–	–	–	–	–
О	–	–	–	–	–	–	–	–	+	–
М	–	–	–	–	–	–	–	–	–	+
Т	–	–	–	–	–	+	–	–	–	–
Л	–	–	–	–	–	–	+	–	–	–

Числа не могу начинаться с нуля, значит В, С, М не ноль. В слове ВЕС если бы все числа были больше 0, то ~~минимальное~~ минимальная сумма была бы 6 (1+2+3), а нужно 5. В и С не ноль, значит Е = 0. По сумме М = МОСТ – СТО, значит М = 26 – 17 = 9. Также по сумме Л = СТОЛ – СТО, значит Л = 23 – 17 = 6. СОМ – М = СО, значит если СОМ = 21, М = 9, 21 – 9 = 12, СО = 12. Значит Т = СТОЛ – Л – СО, значит Т = 23 – 6 – 12 = 5. Т = 5. В слове ВЕС буква С может быть 1, 2, 3 или 4. 1 быть не может (иначе СО – С (если С = 1) = 11, О не может быть 11). 2 быть не может (иначе СО – С (если С = 2) = 10; О не может быть 10). 3 быть не может (иначе СО – С (если С = 3) = 9, О не может быть 9 ведь М = 9). Значит С = 4. Тогда 12 – 4 будет О = 8. Значит В = ВЕС – Е – С, В = 5 – 0 – 4 = 1. В = 1. Значит МОЛОТ → 98685

Ответ: 98685.

+

Задача №2.

Игра закончится тогда, когда все зёрна будут лежать по одному. Чтобы разделить первую горсточку ~~их~~ состоящую из 5 зерен по одному зерну нужно 4 хода, 2 горсть из 7 зёрен — 6 ходов, 3 горсть из 10 зёрен — 9 ходов. 4 горсть из 14 зёрен — 13 ходов, 5 горсть из 16 зёрен — 15 ходов.

Всего получается 4 + 6 + 9 + 13 + 15 = ~~47~~ 47 ходов для окончания ~~из~~ игры.

Петя начинает, и поэтому он будет делать 1, 3, 5 .. ходы (нечётные), а Гриша ходит вторым и всегда делает 2, ~~2~~ 4, 6 ... ходы (чётные)

Значит Петя сделает последний 47-ой ход (потому что номер этого хода нечётный)

Тогда Грише не хватит хода, и он проиграет, значит Петя выиграет.

Ответ: победит Петя.

+

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача №3

Неважно кто в каждой паре поймал больше бабочек, поэтому представим, что в каждой ~~т~~ паре ~~~~ феря поймала в 3 раза больше бабочек, чем ~~он~~ эльф. Значит общее количество бабочек, которых поймали феи в 3 раза больше, чем бабочек которых поймали эльфы. Значит общее количество бабочек должно делиться на 4. (Феи 3 части + эльфы 1 часть).

Число 2025 не делится нацело на 4, поэтому поймать 2025 бабочек феи и эльфы не могли.

+

Ответ: не могли.

Задача №1.

~~В задаче~~

Если всего 7 гномов, то есть вариант когда у всех гномов будет разное количество наград.

N гнома	1	2	3	4	5	6	7
кол-во призов	1	2	3	4	5	6	8

Тогда в сумме будет 29 призов.

Ответ: так будет не всегда.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Уфа	XW39-66	← **Не заполнять** Заполняется ответственным работником
Место проведения	шифр	

Вариант № 17771

ФАМИЛИЯ Нафикова

ИМЯ Милана

ОТЧЕСТВО Марселевна

Дата рождения 28.12.10. **Класс:** 7

Предмет математика **Этап:** Заключительный

Работа выполнена на 4 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.24.
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады: Нафикова

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 1.

4 чер.

4 рыж.

4 фиол. в кр.

Всего вариантов блюд:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = 220$$

Но среди этих вариантов встречаются варианты, когда блюдо не разноцветное, посчитаем их:

$$\frac{\underbrace{4} \cdot \underbrace{3} \cdot \underbrace{2}}{3!} = 4$$ варианта сделать не разноцветное блюдо из одного цвета, но у нас их три =>

$4 \cdot 3 = 12$ вариантов лишних =>

$220 - 12 = 208$ вариантов.

Ответ: 208 вариантов.

+

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17771

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ XW39-66

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

Задача 2. $x, y, w, z \in N$

$A = \overline{1xy}$ $10 > z > 1$, т.к. если число $\overline{1xy}$ умножить больше, чем на 9, то будет уже точно не трехзначное число, а меньше или равно единице не может быть по условию, т.к. число $\overline{xy1}$ должно быть больше.

$\overline{1xy} \cdot z = \overline{xy1}$

$y \cdot z = \overline{w1}$

I $3 \cdot 7 = \overline{w1}$

II $7 \cdot 3 = \overline{w1}$

III $9 \cdot 9 = \overline{w1}$

Расмотрим первый вариант, где $y = 3, z = 7$

$\times \begin{array}{r} 1x3 \\ 7 \\ \hline x31 \end{array}$, но тогда $x \cdot 7 + 2 = \overline{Q3}$ $\Rightarrow x \cdot 7 = \overline{Q1} \Rightarrow x = 3$ $\Rightarrow 1 \cdot 7 + 2 = 9 \neq 3$, не подходит.

Расмотрим второй вариант, где $y = 7, z = 3$

$\times \begin{array}{r} 1x7 \\ 3 \\ \hline x71 \end{array}$, но тогда $3 \cdot x + 2 = \overline{t7} \Rightarrow 3 \cdot x = \overline{t5}$ $\Rightarrow x = 5 \Rightarrow 1 \cdot 3 + 1 = 4 \neq 5$, противоречие.

Расмотрим последний вариант, где $y = 9, z = 9$, тогда:

$\times \begin{array}{r} 1x9 \\ 9 \\ \hline x91 \end{array}$, но тогда $9 \cdot x + 8 = \overline{K9} \Rightarrow 9x = \overline{K1} \Rightarrow$ $x = 9 \Rightarrow 1 \cdot 9 + 8 = 17 \neq 9$, тоже не подходит.

Ответ: невозможно, ч.т.д.

±

5.

Роль / актёры	Главная	Второго плана	Эпизодическая
Ляпкин	—	—	—
Жабкин	—	—	+
Шапкин	—	+	—
Охапкин	—	—	—
Тапкин	+	—	—
Тряпкин	—	—	—

Посмотрим нет ли противоречий Ляпкин не снимается и Жабкина нет в главной роли. Шапкин не появляется чаще Тапкина и Охапкин не снимается. Жабкин и Охапкин не снимаются одновременно. Шапкин играет роль второго плана. Тряпкин не играет.

+

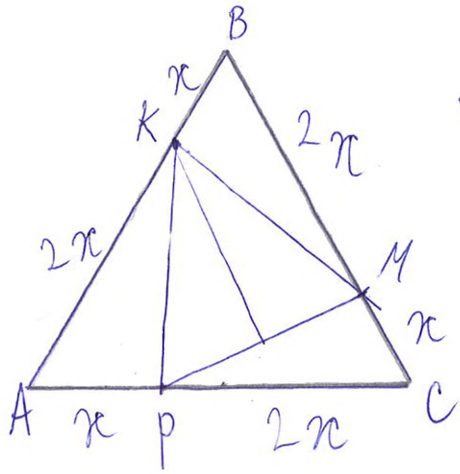
Ответ: Тапкина на главную роль, Шапкина на роль второго плана и Жабкина на эпизодическую роль.

3. Ответ: ответ изменится ~~на~~ в 100 раз (меньше), т. к.

$100x$ л $|100$км $\overset{:100}{=}$ x л $| 1$ км

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

4.



Мы усредни и сделаем так, чтобы ABC был P/C треугольником, тогда: 5 маленьких треугольников площадь $\triangle ABC$, а 3 маленьких треугольника площадь $\square CPKM$ => $\frac{3}{5}$ отношение.

Ответ: $\frac{3}{5}$

—

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Гимназия №6 г. Новочебоксарск	VH 74 - 49	← **Не заполнять** **Заполняется ответственным работником**
Место проведения	шифр	

Вариант № 17101

ФАМИЛИЯ НИКОЛАЕВ

ИМЯ ДМИТРИЙ

ОТЧЕСТВО АНДРИАНОВИЧ

Дата рождения 08.02.2007 **Класс:** 10

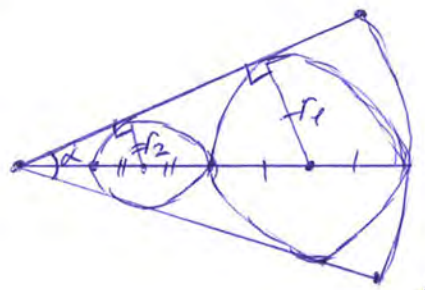
Предмет МАТЕМАТИКА **Этап:** ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ

Работа выполнена на 6 **листах** **Дата выполнения работы:** 10.03.2024
(число, месяц, год)

Подпись участника олимпиады:

Впишите свою фамилию имя и отчество печатными буквами, дату рождения, класс, название предмета, этапа Олимпиады, общее количество листов, на которых выполнена работа и дату выполнения работы.

№2



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_2}{R-2r_1-r_2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_1}{R-r_1} \Rightarrow r_1=\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r_2}{R-2\frac{R\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-r_2}$$

$$r_2=R\sin\frac{\alpha}{2}-2\frac{R\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}-r_2\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$r_2\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=R\left(\sin\frac{\alpha}{2}-2\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$$

$$\frac{r_2}{R}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

$$\cancel{\frac{\alpha}{2}=x}$$

$$\cancel{f(x)=\frac{\sin x-\sin^2 x}{(1+\sin x)^2}}$$

$$\cancel{f'(x)=\frac{(\sin x-\sin^2 x)'\cdot(1+\sin x)^2-(\sin x-\sin^2 x)((1+\sin x)^2)'}{(1+\sin x)^4}}=$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=x$$

$$f(x)=\frac{x-x^2}{(1+x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x-x^2)'(1+x)^2-(x-x^2)((1+x)^2)'}{(1+x)^4}=\frac{(1-2x)(1+x)^2-(x-x^2)\cdot}{(1+x)^4}$$

$$\cdot 2(1+x)$$

$$f'(x)=0 \qquad (1+x)((1-2x)(1+x)-2(x-x^2))=0$$

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

$1+x=0$

$x=-1$

$\sin\frac{\alpha}{2}=-1$

$\frac{\alpha}{2}=-\frac{\pi}{2}$

$1+x-2x-\cancel{2x^2}-2x+\cancel{2x^2}=0$

$1=3x$

$x=\frac{1}{3}$

$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$

$\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{1}{3}$ $\qquad \frac{\alpha}{2}=\cancel{180}\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}$

$\alpha_1=2\arcsin\frac{1}{3}$ $\qquad \alpha_2=2\pi-2\arcsin\frac{1}{3}$

$\frac{r_2}{R}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{9}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{16}{9}}=\frac{1}{8}$

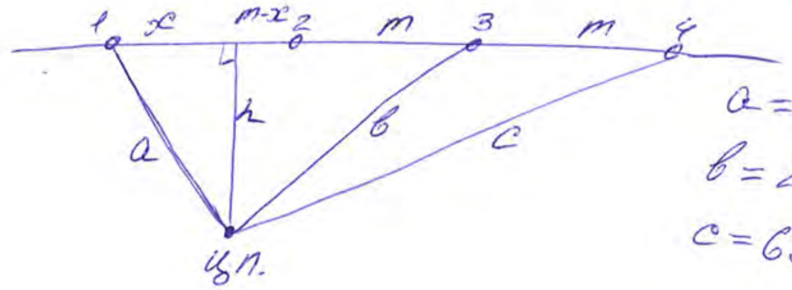
+

Ответ: $\frac{r_2}{R}=\frac{1}{8}$; $\alpha_1=2\arcsin\frac{1}{3}$; $\alpha_2=2\pi-2\arcsin\frac{1}{3}$

$\cancel{\alpha_2=2\pi-2\arcsin\frac{1}{3}}$

В такой угол нельзя вписать окр

№3.



$a=6\sqrt{2}$

$b=2\sqrt{34}$

$c=6\sqrt{10}$

$$\begin{cases} a^2=x^2+h^2 \\ b^2=(2m-x)^2+h^2 \\ c^2=(3m-x)^2+h^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=x^2+h^2 \\ b^2=4m^2-4mx+x^2+h^2 \\ c^2=9m^2+x^2-6mx+h^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-a^2=4m^2-4mx \\ c^2-a^2=9m^2-6mx \end{cases}$$

~~т.к. уравнения неравны~~

$\cancel{\frac{c^2-a^2}{b^2-a^2}=\frac{9m-6x}{4m-4x}}$

$6mx = 9m^2 - c^2 + a^2$

$x = \frac{3}{2}m - \frac{c^2-a^2}{6m}$

$b^2-a^2 = 4m^2 - 4m\left(\frac{3}{2}m - \frac{c^2-a^2}{6m}\right)$

$b^2-a^2 = 4m^2 - 6m^2 + \frac{2}{3}(c^2-a^2)$

$2m^2 = \frac{2}{3}c^2 - \frac{2}{3}a^2 - b^2 + a^2$

$m^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{6} - \frac{b^2}{2} = \frac{360}{3} + \frac{72}{6} - \frac{136}{2} = 64$

$m = \pm 8$ $\quad -8$ не подходит

$x = \frac{3}{2}\cdot 8 - \frac{360-72}{6\cdot 8} = 6$

$h^2 = a^2 - x^2 = 72 - 36 = 36$

$h = \pm 6$ $\quad -6$ не подходит

Ответ: $h=6$; $x=6$; $m=8$

№5.

В неделе 7 дней, 4 из них он ест сосиски, значит есть 5 вариантов, где может быть перерыв между ними.

Всего 3 дня перерыва, это 3 раза по 1 или 2 и 1 по 1 разу

3 раза по 1: $C_5^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$

2 и 1 по разу: $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20$ Всего: $10+20=30$

Ответ: 30

№1

пусть A – n-значное число

тогда $A = 10x + 2$ x – n-1 значное число

x – натуральное

$2\cdot 10^{n-1} + x = 10x + 2 + 18$

$9x = 20\cdot 10^{n-2} - 20$

$9x = 20(10^{n-2}-1)$

$10^{n-2}-1$ должно делиться на 9

~~Это выполняется при всех n~~

~~по условию n=2023, тогда~~

~~$x = 20\cdot\frac{10^{n-2}-1}{9}$~~

чтобы A делилось на 6 его сумма цифр должна делиться на 3, тогда (сумма цифр x)+2 должно делиться на 3

$10^{n-2}-1$ всегда делится на 9, тогда

$x = 20\frac{10^{n-2}-1}{9} = 20\frac{\overbrace{99...99}^{n-2}}{9} = 20\cdot\underbrace{111...111}_{n-2\text{ раз}} = \underbrace{222...22}_{n-2\text{ раз}}0$

$A = \underbrace{222...22}_{n-2\text{ раз}}02$ сумма цифр A равна $(n-1)\cdot 2$

n-1 должно делиться на 3

(2023-1)=2022 – делится

(2024-1)=2023 – не делится

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VH74-49

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

~~нужн~~ при $n = 2023$

$A = \underbrace{222\ldots 22}_{2021\text{ раз}}02$

Ответ: может быть 2023-значные

№4

$a_{n-1} = a_n q$, тогда

$P_n(x) = a_n x^n + a_n q^1 x^{n-1} + a_n q^2 x^{n-2} + \ldots + a_n q^{n-1} x^1 + a_n q^n$

если $P_n(x) = 0$

$a_n(x^n + q x^{n-1} + q^2 x^{n-2} + \ldots + q^{n-1} x^1 + q^n) = 0$

$a_n((x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)) = 0$

эти выражения равны

если во втором ~~первое~~ раскрыть скобки, привести подобные и сравнить с первым, то можно заметить, что

q – сумма всех корней ~~на~~ умноженная на какое-то натуральное число

q^2 – сумма всех попарных произведений корней на натуральное число

q^3 – сумма всех произведений корней попарно на натуральное число

и так далее

$q < 0 \Rightarrow$ все корни положительные, иначе это не выполняется

Олимпиада школьников «Надежда энергетики»

Вариант: 17101

ШИФР, НЕ ЗАПОЛНЯТЬ! ⇨ VH74-49

ВНИМАНИЕ! Проверяется только то, что записано с этой стороны листа в рамке справа

максимальное число корней ровно n

если разбить многочлен на пары вида

$a_1(x^{n-c}q^{c})$ ~~…~~ и $a_1(x^{c}q^{n-c})$

если в каждой паре сумма даст 0, то

$P_n(x)=0$

$-x^{n-c}q^{c}=x^{c}q^{n-c}$

$-x^{n-2c}=q^{n-2c}$

$-x=q$

тогда $x=-q$ один из корней

+